АЛЕКПЕР АСКЕР ОГЛУ АХУНДОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОДНОВРЕМЕННОГО СЛЕЖЕНИЯ ЗА ПОКАЗАНИЯМИ МНОГОЧИСЛЕННЫХ РАЗНОТИПНЫХ ДАТЧИКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭЛМ» БАКУ 2010

УДК 004.9

Научный редактор: **Дж. Э. Аллахвердиев**, *академик НАН Азербайджана*, *д.ф.-м. н.*

Научные рецензенты: **А. Г. Рзаев**, *д. т. н.,*
Г. Г. Абдуллаева, *к.ф.-м. н.*

Рекомендовано к печати в соответствии с решением Научного Совета Института Кибернетики НАН Азербайджана от 9.IX.2009

ISBN 978 - 9952 – 453 – 26 - 3

Ахундов Алекпер Аскер оглу. *Геометрическое решение проблемы одновременного слежения за показаниями многочисленных разнотипных датчиков.* Баку: «Элм», 2010, 256с.

В книге предложена новая неиерархическая система слежения, позволяющая одному наблюдателю осуществлять слежение за одновременными изменениями показаний многочисленных датчиков разного назначения. Процедура слежения проводится без потерь информации, связанной с показаниями датчиков, не требуя, в принципе, серьезных усилий со стороны наблюдателя. Такой, быть может, несколько необычный на первый взгляд результат достигается предпринятыми в книге действиями, направленными на достижение геометрических симметрий, глубоко упрощающих процесс слежения.

Предлагаемая система наблюдения функционирует как прибор, дающий в каждый момент времени на дисплее легко распознаваемое геометрическое изображение, четко определяемое на основе показаний датчиков. Ввиду обилия и разнотипности, одновременно контролируемых датчиков, новая система слежения нередко может заменять обычные иерархические системы слежения, заведомо экономя при этом финансовые средства, и время, затрачиваемое на осуществление межуровневых передач информации.

Книга предназначена для специалистов по системам слежения, диагностирования, а также информационным технологиям.

$$\frac{0605010407}{655(07)-2010}$$

© «Элм» - 2010

ALAKBAR ASKAR AKHUNDOV

GEOMETRICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SIMULTANEOUSLY TRACKING OF THE INDICATIOUS OF THE NUMEROUS SENSORS OF DIFFERENT TYPES

PUBLISHING HOUSE "ELM" BAKU 2010

PREFACE

The book is devoted to the description of the new nonhierarchical observation system that allows the observer to track the changes of numerical values of a great number of independent scalar parameters i.e. the signals of different sensors (measuring instruments). On the basis of sensors readings, the observer may track the quality of functioning of various engineering devices, the peculiarities of natural or production processes progress, the behavior of observed characteristics of moving objects and etc. In the book, such a tracking is called a *global observation* in view of multiplicity and variety of simultaneously observed parameters. The goal is in quick and the detection of different deviations in advance, violations or faultiness occurring in observation objects. In spite of multiplicity of simultaneously controlled sensors, the suggested observation system allows the observer by “shift retention” on a display past observation patterns to track also the evolutions (dynamics of changes) of their readings and in many cases it can successfully replace hierarchical observation systems not loosing tracking reliability. Under such a replacement, gain in observation time is attained at the expense of cancellation of time spent for interlevel transmissions information that is typical for hierarchical observation systems. In the book, the definition of hal-graph (in another equivalent representation a hal-polygon) and adaptive coordinate system are introduced. The definition of hal-graph is introduced as an integral geometric information structure in the form of a graph, whose positions of vertices are uniquely determined by current readings of transducers. Under a priori known best values of readings of sensors, at the expense of automatic application of suitable transformations, all the vertices of a hal-graph are found on

the same fixed straight line. Therefore, for any deviation of the current value of any transducer from the best value, the straight line of a hal-graph violates and this is easily detected on a display by sight. This and similar possibilities stipulated for estimation of deviation degree of readings of a sensors from preassigned best values are realized in adaptive coordinate system. They independently adjust to reading of sensors for their as far as possible convenient perception by the observer. At the same time, in the course of solution of global observation problem we could find out a simple version for partial and oblique solution of the known problem on geometrical evidence in Euclidean spaces of dimension higher than three. The fact that classic problem on geometrical evidence in multi-dimensional Euclidean spaces is so simply and closely connected with global observation problem is rather curious and astonishing. May be the version of solution of a problem on geometric evidence cited in the paper will represent some interest for those who thinks that this problem has no solution at all and may be it will stimulate new investigations in this direction. Applications of a new observation system in diagnostics problems are promising. In this case, it is succeeded to establish homeomorphism correspondence between appropriate set of hal-graphs that by their definition consist of geometrical nature elements. Thereby, in some sense, the relation is established between diagnostics and geometric objects of non complicated structure. Here, it is important that on one hand a hal-graph contains geometrical exact information on state and behaviors of all numerical observed parameters without exception. On the other hand, recognition of the current hal-graphs is simplified by the fact that each vertex of a hal-graph has only one degree of motion freedom. In other words, on the current carrying plane, the vertices of a hal-graph may move only in parallel straight

lines (the vertices of a hal-polygon move only in radially arranged straight lines). In its turn, in observation patterns, immovability of current carrying planes is provided by special time transformations. Usually, we get information on the states of diagnosed objects, generally speaking, not only in the form of graphs, but also of numbers. But as is known, the numbers also are written by some practically instantly recognized geometrical curves. Taking this circumstance into account, we can say that in this book instead of recognition of difficult to survey huge information whose carrier are usually numerical geometric curves we suggest to learn recognition of equivalent information determined by geometrical positions of vertices of only one hal-graph (or of a hal-polygon). In any case, apparently, for fixed observed objects such an instruction is not fantastic at all.

It is interesting that from the theological point of view, the global observation problem should be resolvable since there is no doubt that the God manages to observe successfully incomparably considerable volume of all possible information in the course of time. Consequently, proceeding from this point of view, one can assume that there should exist means and ways that the God himself uses them and realizes current observation simultaneously for all components without exception of such information vast in volume. The global observation problem is very simplified special case, even we can say that extraordinarily simplified technical analogy of this inconceivable complicated (not only from theological point of view) problem. It is remarkable that the suggested observation system even in negligible degree, but in demonstrative way contributes to diminish acuity of atheistic persuasion of distrust that an observer can't keep under observation the alternations occurring in enormous

volume of controlled information even if this observer is the God himself.

The geometrical version of the solution of global observation system described in this book assumes sharp increase of volume of current information introduced on one display without lowering the tracking quality, and apparently this may lead to creation of new time-saving, cheap and reliable observation systems. Practical applications of the suggested version of the solution of global observation problem obviously, may render assistance in some increase of up-to-date observational potentials of human-being.

Institute of Cybernetics of NAS of Azerbaijan, Baku, June 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена описанию новой неиерархической системы слежения (наблюдения), позволяющей одному наблюдателю непосредственно осуществлять слежение за изменениями численных значений большого количества независимых скалярных параметров – сигналов датчиков (измерительных приборов) разного назначения. На основе показаний датчиков наблюдатель сможет вести слежение за качеством функционирования различных технических устройств, за особенностями протекания природных или производственных процессов, за поведениями наблюдаемых характеристик движущихся объектов и т.д. В книге такое слежение, ввиду многочисленности и разнотипности, одновременно наблюдаемых параметров, названо *глобальным наблюдением*. Цель состоит в быстром и заблаговременном обнаружении различных отклонений, нарушений или неисправностей, происходящих в объектах наблюдения.

Предлагаемая система слежения, несмотря на обилие датчиков (контролируемых наблюдателем одновременно), позволяет наблюдателю, путем «удержания со сдвигом» на дисплее прошедших картин наблюдения, проследить также за эволюциями (динамикой изменения) их показаний, и в ряде случаев с успехом может заменять иерархические системы наблюдения без потери надежности слежения. При такой замене выигрыш во времени наблюдения достигается за счет аннулирования времени, затрачиваемой на межуровневые передачи информации, характерные для иерархических систем наблюдения.

В книге введены новые понятия hal-графа (в другом эквивалентном представлении – hal-многоугольника) и адаптивной координатной системы. Представляется немаловажным то, что hal-граф, с одной стороны, несет геометрически достоверную информацию о состояниях и поведениях всех многочисленных

наблюдаемых параметров, а с другой стороны, распознавание текущих hal-графов облегчается тем, что вершины hal-графа обладают только одной степенью свободы движения. А именно, на текущей несущей плоскости вершины hal-графа могут перемещаться только по параллельным прямолинейным отрезкам (а вершины hal-многоугольника могут перемещаться по радиально расположенным отрезкам). В свою очередь, в картинах наблюдения неподвижность самих текущих несущих плоскостей обеспечивается специальными преобразованиями времени.

Предусмотренные в книге возможности для оценки степени уклонения показаний датчиков от наперед заданных наилучших значений, реализованы в адаптивной координатной системе, автономно приспосабливающейся к показаниям датчиков для по-возможности удобного их восприятия со стороны наблюдателя.

Представляются многообещающими приложения новой системы наблюдения в задачи диагностирования. В этом случае удается установить гомеоморфное соответствие между множеством всевозможных состояний различных диагностируемых объектов и соответствующим множеством hal-графов, по своему определению состоящим из элементов геометрической природы. Тем самым, в некотором смысле устанавливается связь между диагностированием и геометрическими объектами не сложной структуры.

Обычно информацию о состояниях диагностируемых объектов мы получаем, вообще говоря, в виде не только графиков, но и чисел. Но и числа, как известно, записываются посредством некоторых практически мгновенно распознаваемых геометрических кривых. Принимая во внимание это обстоятельство, можно сказать, что в книге предлагается вместо распознавания трудно обозримой огромной информации, носитель-

ницей которой обыкновенно служат многочисленные геометрические кривые, обучится распознаванию эквивалентной информации, определяемой геометрическими положениями вершин всего одного hal-графа (или hal-многоугольника). Во всяком случае, для фиксированных наблюдаемых объектов такое обучение, по-видимому, не представляется слишком уж нереальным.

Интересно, что с теологической точки зрения проблема глобального наблюдения должна быть разрешимой, поскольку представляется бесспорным, что Всевышнему удается успешно осуществлять беспрерывное наблюдение по ходу времени за несравненно более значительным объемом всевозможной информации.

Следовательно, исходя из этой точки зрения, можно предположить, что должны существовать средства и способы, используя которых сам Всевышний реализовывает текущее наблюдение одновременно за всеми без исключения составляющими столь громадной по объему информации. Проблема глобального наблюдения является весьма упрошенным частным случаем, можно сказать до чрезвычайности упрошенным техническим аналогом этой невообразимо сложной, и не только с теологической точки зрения, проблемы.

Примечательно, что предлагаемая система наблюдения хоть и в небольшой степени, но все-таки *доказательным* образом способствует уменьшению остроты атеистического толка недоверия о невозможности со стороны одного наблюдателя держать под наблюдением изменения, происходящие в колоссальном объеме контролируемой информации, даже если наблюдателем является сам Всевышний.

Любопытно, что попутно, на пути решения проблемы глобального наблюдения удалось обнаружить простую версию для частичного и косвенного решения известной проблемы о гео-

метрической наглядности в эвклидовых пространствах размерности выше трех.

Представляется несколько интригующим и удивительным тот факт, что известная классическая проблема геометрической наглядности в многомерных эвклидовых пространствах оказалась так просто и тесно связанной с проблемой глобального наблюдения. Приведенная в работе версия решения этой проблемы, быть может, представить некоторый интерес для тех, кто до сих пор считает, что у этой проблемы вообще никакого решения не существует и, возможно, послужит стимулом для проведения новых исследований в этом направлении.

Описанная в книге геометрическая версия решения проблемы глобального наблюдения, предполагает резкого увеличения объема выводимой на один дисплей текущей информации без снижения качества слежения. Такой шаг, по-видимому, может привести к созданию новых времясберегающих, недорогих и надежных систем наблюдения.

Практические применения предлагаемого решения проблемы глобального наблюдения, возможно, помогут оказать содействие к некоторому увеличению современных наблюдательных возможностей человека.

Институт Кибернетики НАН Азербайджана, Баку, Июнь 2009

ВВЕДЕНИЕ

На практике слежения за текущими показаниями многочисленных датчиков, характеризующих течения каких-либо процессов, следующая ситуация, по-видимому, встречается довольно часто. Наблюдателю (оператору, диспетчеру, следящему), осуществляющему слежение, на дисплей чаще выводится не вся, а только лишь небольшое количество наиболее важной на данный момент информации. Так как при большом количестве информации надежность слежения снижается, что связано с особенностями человеческого восприятия информации. С другой стороны, существуют такие ситуации, когда количество важнейших текущих показателей, подлежащих непрерывному и одновременному наблюдению, нецелесообразно ограничить малым числом. В подобных случаях проблема решается часто за счет увеличения количества наблюдателей и создания многоуровневой иерархической системы слежения. Это, естественно, приводит к удорожанию, усложнению и потерям времени при наблюдении.

Причины удорожания такой процедуры наблюдения вполне очевидны. Усложнение же возникает из-за необходимости организации определенной иерархической структуры наблюдения, позволяющей на верхнем уровне этой структуры на основе данных, поступающих из первичных и промежуточных уровней, принимать адекватные решения о текущих состояниях объектов наблюдения. В иерархической системе слежения потери времени, затрачиваемые на межуровневые передачи информации, заведомо ожидаемы.

Поэтому представляется актуальным такое решение проблемы слежения, которое объединяет, казалось бы, противоположные вещи, а именно, с одной стороны, требуется значительно увеличить объем информации, выводимой на один

дисплей и, с другой стороны, при этом требуется не допускать уменьшения надежности слежения.

В книге всюду «*надежность слежения*» определяется тем, что слежение должно проводиться без потерь информации (связанной с показаниями датчиков) и, в принципе, в неутомительных для наблюдателя условиях.

Проблему глобального наблюдения (или слежения) можно сформулировать следующим образом:

Требуется разработать такую неиерархическую систему слежения, которая позволяет одному наблюдателю в течение заданного времени осуществлять беспрерывное и надежное слежение за всеми без исключения составляющими некоторого потока информации.

Здесь мы приняли, что *поток информации* складывается в каждый момент времени из текущих численных показаний значительного количества датчиков разного назначения.

Для приложений важность проблемы глобального наблюдения обуславливается тем, что успешное ее решение может привести к созданию качественно новой системы слежения, предоставляющей наблюдателю по ходу времени целиком всю текущую информацию о реальных состояниях многочисленных наблюдаемых объектов в удобном для восприятия виде.

Это может уменьшить время обнаружения неполадок, что особенно ценно в тех случаях, когда количество важных для неотлагательного слежения объектов не выражается малым числом. Ибо, известно, что в опасных предкризисных ситуациях даже незначительный выигрыш во времени обнаружения неисправностей иногда повышает шансы для предотвращения (или, хотя бы уменьшения нежелательных последствий) надвигающихся аварий, или катастроф.

Предложенное в книге геометрическое решение проблемы глобального наблюдения создает основательные предпосылки

для качественно новой организации процедур слежения.

Идею решения этой проблемы кратко можно описать следующим образом.

С помощью введенных в книге ключевых понятий *hal-графа* (в другом эквивалентном представлении – *hal-многоугольника*) и *адаптивной координатной системы* текущие значения показаний датчиков используются для оценки качества функционирования объектов наблюдения.

Понятие hal-графа вводится как целостная геометрическая информационная структура, имеющая вид графа, положения вершин которого гомеоморфным образом определяются текущими показаниями контролируемых датчиков.

Необходимость во введении целостной структуры мы можем объяснить следующим простым соображением. Определить траекторию движения муравья по движениям многочисленных атомов, имеющихся в теле муравья практически очень трудно, и наоборот, легко и не утомительно в случае, когда муравей рассматривается как единая целостная структура. Сравнительно простую для наблюдений целостную геометрическую структуру имеет обычная линия, и hal-граф – это ломаная линия с особыми свойствами. При известных наилучших (оптимальных, номинальных или, наконец, просто желанных) значениях показаний датчиков, за счет применения подходящих преобразований, все вершины hal-графа оказываются на одной вертикальной линии, а именно, на прямой линии, перпендикулярной к нижней стороне прямоугольной плоскости дисплея.

Поэтому при любом уклонении текущего значения какого-либо датчика от наилучшего значения, прямолинейная структура hal-графа искажается, и он приобретает вид ломаной линии.

Обнаружить и идентифицировать такие искажения, как по-

казывают компьютерные эксперименты, не очень трудно.

Причина легкости обнаружения искажений заключается в том, что всякое изменение положения, к примеру, одной не концевой вершины hal-графа, являющейся только лишь точкой, сопровождается соответствующими изменениями положений множества точек, из которых состоят два ребра hal-графа, неразрывно примыкающие к этой вершине. По этой же причине заметить даже незначительного изменения пространственного положения одного ребра hal-графа, примыкающего к концевой вершине, оказывается не очень трудным.

Любопытно, что сказанное соображение довольно убедительно согласуется также древним, и по сей день являющимся весьма надежным строительным опытом, основанным на использовании отвеса.

В самом деле, классический отвес по своему устройству – маятник с регулируемой длиной нити, и в состоянии покоя, позволяет строителям надежно и быстро определить даже незначительные отклонения от вертикали той части возводимой стены (которая в нашем случае соответствует текущему положению hal-графа), к которой он приложен. Это и похожие возможности, предусмотренные для оценки степени уклонения показаний датчиков от их наилучших значений, реализованы в адаптивной координатной системе.

Основное отличие адаптивной координатной системы от многих известных стандартных координатных систем состоит в том, что в ней нет общего для всех координатных осей единого начала координат. Отсутствие единой для всех осей связки, создает возможности для сконструирования адаптивной координатной системы в обычном трехмерном евклидовом пространстве в качестве своеобразной, многомерной координатной системы. Она состоит из совокупности практически полностью независимых между собой двумерных прямоуголь-

ных декартовых координатных систем с подвижными осями. Разобщенность координатных осей, позволяет по ходу времени дифференцированным образом применять к ним преобразования типа сдвига, переноса и растяжения-сжатия (дополнительно еще и вращения, в случае перехода к hal-многоугольникам).

Целенаправленные движения осей координатной системы, а также растяжения-сжатия, вызываемые действиями преобразований, собственно и обусловливают приспособляемость (адаптивность) новой координатной системы к текущим показаниям датчиков, с целью отражения их на дисплее в удобном для восприятия целостном виде.

Для того чтобы не отвлекать внимания и, главное, не утомлять наблюдателя движениями подвижных элементов адаптирующееся координатной системы, предприняты определенные, упрощающие текущие изображения действия. Реализованы дополнительные преобразования времени, создающие полную иллюзию неподвижности для всей видимой на дисплее геометрической конструкции адаптивной координатной системы. В итоге, в этой координатной системе подвижными оказываются только вершины и соответственно ребра hal-графа.

Предлагаемая в книге система наблюдения действует как прибор, создающий на дисплее в каждый момент времени легко распознаваемое изображение. Оно отражает сразу все важные для слежения характеристики, которые можно получать обыкновенно лишь по отдельности, на выходах одновременно функционирующих многих сотен датчиков. Более того, новая система наблюдения, несмотря на обилие и разнообразие одновременно контролируемых датчиков, позволяет наблюдателю проследить также за динамикой изменения (эволюцией) их показаний.

Максимальное количество датчиков, за показаниями которых наблюдатель сможет эффективно осуществлять слежение, зависит, прежде всего, от высоты картины наблюдения, допускаемой техническими характеристиками используемого дисплея (определяемыми высотой экрана и размерами пикселей) и при необходимости, увеличивающего ее изображение проектора. Этот вопрос обсужден в IV главе, где в частности, описываются некоторые технические условия, когда один наблюдатель сможет осуществлять надежное слежение за текущими показаниями сразу нескольких сот датчиков. В той же главе реализована возможность для представления картины наблюдения в более компактной форме – в виде изображения типа циферблата (в этом случае hal-граф трансформируется в hal-многоугольник).

В книге к датчикам, используемым в процессе слежения, особые требования не предъявляются. В частности, среди контролируемых наблюдателем датчиков могут быть такие, которые передают сигналы с какой угодно сложной структурой. Например, датчиками могут быть даже высокочувствительные микрофоны, применяемые для диагностирования какого-либо двигателя, работа которого контролируется по издаваемым им при функционировании звукам (шумам). Они передают аудио сигналы, имеющие обычно нетривиальные для анализа строения.

В предлагаемой системе слежения по завершению процесса обучения (настройки) и начала слежения максимальное количество арифметических операций, выполняемых для вычисления координат hal-графа в каждый рассматриваемый текущий момент времени, равно $2n$ (используются поровну лишь операции вычитания и умножения), где n – общее число используемых для слежения датчиков. Количество выполняемых в те же моменты времени и с той же целью логических

операций определяется числом n, так что, к примеру, если $n \leq 500$, то при осуществлении слежения чаще всего не возникнет потребности в особо мощном компьютере.

Представляются многообещающими приложения новой системы слежения в задачи диагностирования, поскольку существует гомеоморфизм между множествами всевозможных состояний различных диагностируемых объектов и геометрических местоположений соответствующих hal-графов. В итоге, задача диагностирования сводится к эквивалентной задаче распознавания плоских hal-графов.

Последняя задача облегчается тем, что hal-графы, как целостные геометрические объекты, обладают легко распознаваемой простой структурой. Тем самым, устанавливается взаимнооднозначная связь между диагностированием и геометрией объектов элементарной структуры.

Конечно же, некоторые существующие на практике диагностические приборы (датчики) конструктивно рассчитаны как раз на то, чтобы передавать информацию о состоянии диагностируемых объектов в виде графиков, которые естественно можно рассматривать в качестве геометрических объектов.

Однако каждый такой график, с одной стороны, содержит информацию, как правило, об изменениях одного или нескольких физических параметров, т.е. не несет подобно hal-графу достоверную геометрическую информацию о поведениях всех многочисленных наблюдаемых параметров. С другой стороны, опять же в отличие от текущих hal-графов – ломаных линий, имеющих вершины только с одной степенью свободы движения, – эти графики нередко описываются кривыми достаточно сложной формы, требующими от наблюдателя соответствующей квалификации и навыков для адекватного их распознавания.

Попутно, на пути решения проблемы глобального наблюде-

ния удалось обнаружить простую версию для частичного и косвенного решения известной проблемы о геометрической наглядности в многомерных эвклидовых пространствах. Приведенная в книге простая версия решения этой проблемы, быть может, представить некоторый интерес для тех, кто до сих пор считает, что у этой проблемы никакого решения не существует и, возможно, послужит стимулом для проведения новых исследований в этом направлении.

Настоящая книга состоит из четырех глав. Краткие сведения об их содержании приведены в начале каждой главы. Материал книги распределен по главам таким образом, чтобы по возможности удобно было обеспечить интересы различных категорий читателей, освободив некоторые из них от необходимости полного знакомства с книгой. Читатели, интересующиеся описанием версии частичного и косвенного решения проблемы о геометрической наглядности в многомерных эвклидовых пространствах, могут ограничить свое знакомство с книгой чтением лишь только I главы. Читатели, интересующиеся исключительно практическими аспектами, связанными с программной реализацией предлагаемой версии решения проблемы глобального наблюдения, могут пропустить чтение III главы, а также разделов 1.4 и 2.3.

По замыслу автора, почти полное отсутствие в книге библиографии должно служить не столько для фиксации пионерского характера излагаемого материала, а, сколько для подчеркивания малости используемого математического материала. От читателя для освоения книги, и в особенности III главы, в большей степени требуется другое, а именно то, чего примерно можно было бы называть «распределенным и не статичным трехмерным воображением».

Использованные в работе такие символы как штрихи, звездочки, кружочки и некоторые их комбинации всегда

записываются на месте правого верхнего индекса. Часть приводимых в книге рисунков получена посредством нескольких вспомогательных диалоговых программ, разработанных автором в программной среде *Visual Basic* 6.0.

В книги всюду термины «наблюдение» и «слежение» употребляются только как синонимы.

Некоторые материалы книги обсуждались на конференциях [1],[2] и на семинарах в ИК НАН Азербайджана.

В заключение введения считаю своим приятным долгом выразить признательность член-корреспонденту НАН Белоруссии Ф.М.Кирилловой за поддержку и научные советы, увеличившие решимость автора в написании этой книги. Благодарю научного редактора книги, академика НАН Азербайджана Дж.Э.Аллахвердиева за обсуждения книги, способствующие улучшению изложения темы.

Влияние этих крупных деятелей науки, а также поддержка, оказанная руководством ИК НАН Азербайджана и, в не меньшей степени, директором ИПМ БГУ, академиком НАН Азербайджана Ф.А.Алиевым, все время вдохновляли автора ускорить работу над завершением оформления книги.

Для автора полезными оказались замечания рецензентов – А.Г.Рзаева (по терминологии) и Г.Г.Абдуллаевой (по медицинской диагностике). Приношу им свою благодарность.

Наконец, и далеко не в последнюю очередь, я выражаю признательность моей коллеге по работе и супруге – к.ф.-м.н. Эльмире Ахундовой, поддержавшей меня полезными для книги советами и, кроме того, взявшей почти все заботы нашей семьи на свои плечи за весь длительный период работы над этой книгой.

ГЛАВА I. ПЕРВАЯ АДАПТИВНАЯ КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

Первая глава посвящена определению адаптивной координатной системы и исследованию некоторых ее свойств. В ней, после описания обозначений для показаний датчиков и определения допустимых, граничных и оптимальных (наилучших, номинальных, программно заданных и, наконец, просто желанных) их значений (раздел 1.1), вводится понятие первой адаптивной координатной системы, находящейся в исходном положении (раздел 1.2).

В разделе 1.2 проведены тщательные обсуждения непростой задачи выбора единиц измерения для координатных осей I адаптивной координатной системы, рассчитанных для геометрического представления численных значений показаний датчиков. Сложность этой задачи предопределяется тем, что контролируемые наблюдателем датчики не обязательно – однотипные. Для «развязывания» этого гордиевого узла мы предприняли шаги, вызывающие некоторые ассоциации со способом, примененным великим Александром Македонским для распутывания одноименного узла.

Общее требование, которое предъявляется к датчикам, заключается в том, что почти всякий используемый в наблюдении датчик в каждый текущий момент времени должен иметь наилучшие и недопустимые (снизу и сверху) значения. Иначе говоря, к датчикам, используемым в процессе слежения, какие-либо особые специфические требования не предъявляются. В частности, среди контролируемых наблюдателем датчиков могут быть такие, которые передают сигналы с какой угодно сложной структурой.

В разделе 1.3 выясняются некоторые аффинные, метрические и топологические свойства подмножества эвклидова про-

странства R_3, которое задействовано в конструкции адаптивной координатной системы. Выяснен также вопрос о ее размерности.

Результаты этого раздела, возможно, помогут содействовать пониманию того, что адаптивная координатная система – потенциально не «чужеродный элемент» в ряду известных и полезных координатных систем.

В основном результате раздела 1.3 зафиксировано наличие гомеоморфизма между эвклидовым пространством R_n и многообразием графов, определенным специальным образом на обычной двумерной плоскости.

В этом же разделе (в примечании 2) вкратце разъяснено важное практическое значение понятия гомеоморфизма, используемого во многих разделах этой книги.

Именно на базе этого гомеоморфизма в разделе 1.4 предложена простая версия для частичного и косвенного решения общей проблемы о геометрической наглядности в эвклидовых пространствах $R_n\ (n > 3)$.

В предлагаемом ее решении используется геометрическая конструкция стационарной координатной системы, полученной от I адаптивной координатной системы путем отбрасывания временных координатных осей.

Представляется несколько интригующим и удивительным тот факт, что проблема геометрической наглядности в многомерных эвклидовых пространствах оказалась так просто и тесно связанной с проблемой глобального наблюдения.

1.1. ПОКАЗАНИЯ ДАТЧИКОВ

Предполагаем, что наблюдатель располагает необходимыми техническими средствами для приема и обработки сигналов (аналоговых или цифровых) от большого количества одновременно функционирующих датчиков различного назначения.

Например, одновременно часть датчиков могут передавать значения текущих координат некоторого числа подвижных объектов, другая часть, могут охарактеризовать качества или особенности протекания некоторого числа производственных или природных процессов соответственно, третья часть – сигнализировать о текущем физическом состоянии некоторого числа людей и т.д.

Так что нам вовсе не нужно потребовать, чтобы численные показания датчиков, следовательно, и сами датчики, и, наконец, соответствующие этим показаниям физические размерности, были однотипными.

Численные показания, в зависимости от типов используемых различных датчиков могут быть охарактеризованы, как обычно, соответствующими как системными, так и внесистемными физическими размерностями. Не исключаются также случаи использования безразмерных величин.

Ниже, мы будем исходить из того общего признака (относительно датчиков), что среди произвольных численных показаний почти всякого используемого в наблюдении датчика имеются наилучшие (в зависимости от контекста: – оптимальные, номинальные, программно заданные и, наконец, просто желанные) и недопустимые (снизу и сверху)

значения. Последние значения, очевидно, могут быть определены (в процессе обучения) из априори известных условий о границах нормального функционирования наблюдаемых объектов и, разумеется, с учетом технических характеристик применяемых датчиков.

Пусть имеется N объектов для наблюдения, и все они пронумерованы в произвольном порядке натуральными числами $1, 2, ..., N$. Согласно проблеме глобального наблюдения одному наблюдателю требуется в течение некоторого времени $T = [t_0, t_1]$, осуществлять одновременное слежение сразу за поведениями всех N объектов, используя для этого текущие показания $n \geq N$ датчиков:

$$1_1(t), 1_2(t), ..., 1_{k_1}(t), 2_1(t), 2_2(t), ..., 2_{k_2}(t), ..., N_1(t), N_2(t), ..., N_{k_N}(t).$$

Здесь $i_j(t)$ – скалярная функция, равная в момент времени $t \in T$ численному значению показания j - го датчика отнесенного к объекту i, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Таким образом, как это видно из обозначений, мы приняли, что количество задействованных для объекта i датчиков равно k_i, $i = \overline{1, N}$, а суммарное количество всех датчиков определяется равенством $n = k_1 + k_2 + ... + k_N$.

Нужно подчеркнуть, что скалярность функции $i_j(t)$ имеет существенное значение для излагаемой геометрической версии решения проблемы. Поэтому, если показания какого-либо датчика описываются векторной функцией, то каждой ее компоненте следует относиться как к скалярному показанию отдельного датчика.

Например, показания устройства, передающего сразу три координаты какого-либо мобильного объекта, надлежит воспринимать как скалярные показания трех датчиков.

Определение 1.1.1. *Функции* $i_j(t)$ *назовем наблюдаемыми, а их численные значения наблюдаемыми значениями. Назовем допустимыми все те наблюдаемые значения* $i_j(t)$, $j=\overline{1,k_i}$, $t \in T$, *при которых объект* i *функционирует нормально,* $i=\overline{1,\ N}$.

Примем, что все датчики или, хотя бы, подавляющее количество датчиков, задействованных в процесс наблюдения, могут принимать допустимые значения из некоторых интервалов.

Пусть $I_{ij}(t)=\left(a_{ij}(t),\ b_{ij}(t)\right)$ – минимальный по длине интервал, содержащий в момент времени $t \in T$ все допустимые значения функции $i_j(t)$, так что объект i, $i=\overline{1,\ N}$, функционирует на момент времени t нормально, если только $i_j(t) \in I_{ij}(t)$ для всех значений j, $j=\overline{1,k_i}$.

Зависимость в общем случае границ $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ от времени позволяет расширить разновидности наблюдаемых объектов. Например, в процесс наблюдения можно включать в большом количестве такие подвижные объекты как самолеты, космические летательные аппараты и т.д. При этом соответствующими совокупностями функций $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ можно задавать, например, координаты границ коридора полета или координаты границ зоны спуска летательного аппарата и т.д.

Замечание об интервалах

Следует отметить, что при возникновении необходимости, открытый интервал для допустимых значений можно заменить полузамкнутым или замкнутым интервалом, без серьезного ущерба для дальнейшего изложения. В этих, не упоминаемых нами далее случаях, придется внести небольшие и очевидные изменения в некоторые приводимые в книге определения и построения.

Определение 1.1.2. *Значения наблюдаемой функции* $i_j(t)$*, удовлетворяющие условию* $i_j(t) \notin I_{ij}(t)$*, назовем недопустимыми (или опасными, нежелательными) для объекта* i *в момент времени* t *и по датчику* j*, отнесенному к объекту* i.

Функции $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ будем называть *левыми* и *правыми граничными функциями* соответственно, или, иногда более кратко – *граничными функциями*. Значения этих функций назовем соответственно *левыми* и *правыми граничными недопустимыми значениями*, или кратко – *граничными значениями*.

Примем, что показание каждого датчика может иметь самое большее две граничных недопустимых значения, при которых возникает опасность для нормального функционирования соответствующего объекта слежения.

Случаи $a_{ij}(\cdot) = -\infty$ или $b_{ij}(\cdot) = +\infty$ считаем возможными.

Не исключаются случаи, когда некоторые функции $i_j(\cdot)$ – дискретные или булевы.

Например, пусть $i_j(\cdot)$ – дискретная функция и имеет только одно недопустимое крайнее (минимальное или максимальное) значение. В этом случае, недопустимое зна-

чение приписывается одной из функций $a_{ij}(\cdot)$ или $b_{ij}(\cdot)$, а интервал $I_{ij}(\cdot)$ заменяется одним из бесконечных интервалов $(a_{ij}(\cdot),\infty)$ или $(-\infty,b_{ij}(\cdot))$ соответственно. Естественно, что в обоих случаях процесс слежения упрощается, поскольку соответственно уменьшаются общее количество граничных ограничений.

Определение 1.1.3. *Выделим в каждом интервале* $I_{ij}(t)$ *по одной допустимой точке* $c_{ij}(t)$, *и примем, что в каждый момент времени* $t \in T$ *значения* $c_{ij}(t)$, $j=\overline{1,k_i}$, *соответствуют наилучшему (оптимальному, номинальному, программно заданному) режиму функционирования объекта* i, $i=\overline{1,N}$. *Назовем отображения* $c_{ij}(t)$ – *оптимальными функциями, а их значения соответственно – оптимальными значениями.*

Здесь и далее повсюду в тексте термин «оптимальный» используется в собирательном смысле, он у нас заменяет термины «наилучший», «номинальный» и «программно заданный», которые применяются для описания желаемых (или ожидаемых) характеристик объектов слежения.

Описываемая в книге система слежения строится при соблюдении следующих двух исходных условий:

1. *Значения всех оптимальных функций* $c_{ij}(t)$ $\forall \tau \in T$ *всегда предполагаются конечными*;

2. *Оптимальные значения, также как и граничные недопустимые значения, считаются заранее (априори) известными или заданными.*

Разумеется, что при этом не исключается возможность их текущей корректировки, т.е. изменения по ходу времени, что может оказаться полезной, например, при слежениях за мобильными объектами.

Из определения 1.1.3 вытекают следующие отношения порядка:

$$a_{ij}(\tau) < c_{ij}(\tau) < b_{ij}(\tau) \ \ \forall \tau \in T \text{ , } i = \overline{1, N} \text{ , } j = \overline{1, k_i} \text{ .} \qquad (1.1.1)$$

Процесс слежения для каждой отдельно взятой наблюдаемой функции $i_j(t)$ несложен, а именно, требуется в каждый момент времени $t \in T$ знать двух вещей: справедливо ли включение $i_j(t) \in I_{ij}(t)$ (отсутствие или наличие аварийной ситуации на момент времени t), и если да, то насколько значения $i_j(t)$ близки к оптимальным значениям $c_{ij}(t)$ (определение качества функционирования соответствующего узла объекта i на момент времени t).

Данный процесс превращается в очень серьезную проблему (глобального наблюдения) тогда, когда число n велико и требуется одному наблюдателю по ходу времени осуществлять одновременное надежное слежение, т.е. проследить по ходу времени за изменениями численных значений всех наблюдаемых функций $i_j(t)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, $t \in T$, характеризующих контролируемых объектов слежения.

Напомним, что смысл, придаваемый нами выражению «надежное слежение» был ранее изложен во введении.

Замечание о трактовке проблемы

Приведенная выше трактовка проблемы глобального наблюдения – не единственно возможная.

Без внесения уводящих нас в сторону пояснений, отметим, что например, допустима ситуация, в которой оптимальными значениями служат значения, превосходящие по величине соответствующие значения правых граничных функций. При этом, естественно, меняются соответствующие определения граничных и оптимальных функций. Так что в принципе, введенные выше термины при необходимости могут претерпевать изменений, обеспечивая тем самым большее соответствие к новым реалиям.

Подобные изменения в данной книге не рассматриваются.

1.2. ПЕРВАЯ АДАПТИВНАЯ КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА В ИСХОДНОМ ПОЛОЖЕНИИ

Первую адаптивную координатную систему в исходном положении, т.е. до начала процесса наблюдения $t < t_0$, определим в трехмерном евклидовом пространстве R_3 на двух взаимно перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по некоторой линии DD_0. На графическом изображении одну из этих плоскостей выберем таким образом, что она совмещалась с прямоугольной плоскостью дисплея, а прямая линия DD_0 была перпендикулярной к основанию этого прямоугольника.

Линию DD_0 разместим приблизительно в середине левой половины плоскости дисплея (для того чтобы выиграть больше места на правой части дисплея для разме-

щения прошлых картин наблюдения, командных кнопок и текстовых окон ввода и вывода информации).

Определение 1.2.1. *Плоскость, совмещавшейся с плоскостью дисплея, назовем несущей плоскостью.*

На несущей плоскости, ортогонально к линии DD_0 расположим координатные оси x_i, $i=\overline{1,n}$, предназначенные для геометрического изображения значений наблюдаемых функций $i_j(t)$, граничных и оптимальных функций, $i=\overline{1,\, N}$, $j=\overline{1,k_i}$, $t\in T$.

Будем считать, что все эти координатные оси ориентированы одинаково (на плоскости дисплея в направлении слева направо) и начальная точка каждой координатной оси x_i находится на линии DD_0.

На второй плоскости, ортогональной к несущей плоскости, расположим в количестве n и перпендикулярно к линии DD_0 координатные оси t_i, предназначенные для измерения времени. Примем, что оси времени t_i в начальных точках примыкают к началу соответствующих (по индексу) координатных осей x_i. В результате, каждая пара осей x_i, t_i, $i=\overline{1,n}$, в пространстве R_3 будет определять координатную плоскость.

Считаем, что оси времени ориентированы одинаково и таким образом, что каждая упорядоченная пара координатных осей x_i, t_i образует левую декартовую координатную систему (единицы измерения координатных осей определены ниже).

Следующие дополнительные двух индексные обозначения X_{ij} и t_{ij} для координатных осей x_i и t_i соответственно, оказываются иногда более удобными, поскольку позволяют установить легко воспринимаемые взаимнооднозначные соответствия $X_{ij} \leftrightarrow i_j(\cdot)$, $t_{ij} \leftrightarrow i_j(\cdot)$ между координатными осями и нумерациями датчиков:

$$X_{ij} = \begin{cases} x_j, & i = 1,\ j = \overline{1,k_1}, \\ x_{k_1+\ldots+k_{i-1}+j}, & i = \overline{2,N},\ j = \overline{1,k_i}, \end{cases} ,$$

$$t_{ij} = \begin{cases} t_j, & i = 1,\ j = \overline{1,k_1}, \\ t_{k_1+\ldots+k_{i-1}+j}, & i = \overline{2,N},\ j = \overline{1,k_i}. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

По соображениям симметрии удобно считать, что расстояния между всеми ближайшими соседними координатными плоскостями одинаковы. Однако это условие не есть серьезное ограничение, и может быть нарушено при возникновении необходимости.

Например, можно без прерывания процесса наблюдения включать в адаптивную координатную систему новые координатные плоскости, или исключить некоторые из них.

Расстояния между параллельными координатными плоскостями, более того, и вся та часть эвклидового пространства R_3, которая является дополнением к координатным плоскостям, никоим образом не влияют на координатно-измерительные функции адаптивной координатной

системы.

Двумерные координатные системы в количестве n, определенные выше на декартовых произведениях $X_{ij} \times t_{ij}$, и предназначенные для фиксирования текущих показаний всех датчиков, а также их оптимальных и граничных недопустимых значений на соответствующих (по индексам) координатных плоскостях, образуют в евклидовом пространстве R_3 цельную конструкцию единой координатной системы.

Эту координатную систему отсчета, после определения единиц измерения для всех ее координатных осей, будем называть *первой адаптивной координатной системой* (см. рис.1).

Примем, что в процессе слежения течение времени на всех координатных осях времени t_i идентичны с течением времени некоторого исправно работающего часового устройства, и длины единиц измерения времени на всех координатных осях времени тождественно одинаковы, и равны некоторой фиксированной положительной величине.

Итак, по принятому условию, координатные оси времени t_i имеют *общую* единицу времени.

Определение 1.2.2. *Хронометром наблюдения будем называть исправное часовое устройство, неподвижное относительно места осуществления наблюдения и используемое наблюдателем в процессе слежения для установления значений времени.*

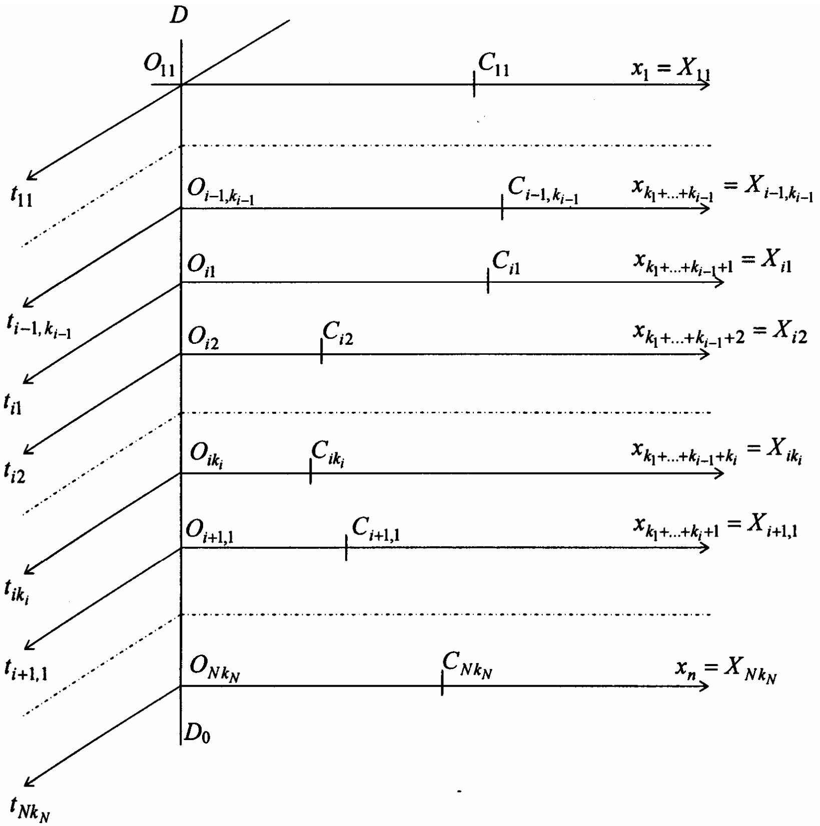


Рис.1. Первая адаптивная координатная система в исходном неподвижном положении и с изображениями в начальный момент времени оптимальных точек $C_{ij} = C_{ij}\left(c_{ij}\left(t_0\right), t_0\right)$.

Каждая начальная точка O_{ij} имеет на координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ декартовые координаты $\left(0, t_0\right)$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,k_i}$.

(*продолжение текста рисунка вначале стр.34*)

Из этих координатных записей ясно, что в некоторых случаях, точки, расположенные на различных двумерных координатных плоскостях могут иметь совершенно одинаковые по численным значениям координаты. Позже, для адаптивных координатных систем мы введем специальные обозначения, с целью различения записей координат неодинаковых точек из разных координатных плоскостей, имеющих, однако одинаковые численные значения координат.

Общей единице времени, еще до начала процесса слежения приписывается одна из возможных системных или внесистемных физических размерностей времени.

При этом можно исходить из того, что физическая размерность общей единицы времени такая же, каковая конструктивно предусмотрена (или устанавливается) в конкретно используемом хронометре наблюдения.

Отметим, что при таком подходе все координатные оси времени можно трактовать как копии одной временной координатной оси. Поэтому мы можем говорить об общем для всех координатных осей t_i значении времени. Его мы будем обозначать одним символом, общим для всех координатных осей времени.

В отличие от координатных осей времени t_i, не временные координатные оси x_i нужны для определения, измерения или адекватной фиксации в пространстве точек, которые сопоставляются численным показаниям датчиков самого разнообразного назначения.

Само собой разумеется, что в зависимости от конкретных назначений или типов используемых в целях слежения датчиков, соответствующие системные или внесистемные физические размерности, приписываемые единицам изме-

рения координатных осей x_i, могут быть различными. Более того, среди них могут встречаться различные физические размерности времени, обычно используемые в составных (т.е. не фундаментальных) физических единицах.

Например, если некоторый летающий самолет является одним из объектов слежения, то время может присутствовать в показаниях: – путевой скорости (скорости перемещения самолета относительно земной поверхности), воздушной скорости (скорости перемещения самолета относительно воздушной массы), расхода топлива (расхода единицы массы топлива за единицу времени) и т.д.

Возможность приписывать единицам измерения координатных осей x_i физические размерности, содержащие в себе различные размерности времени, существенно расширяет функциональные возможности системы слежения.

В частности, становится благоприятным осуществление одновременного слежения за объектами, для которых изменения показаний датчиков могут происходить со значительной разницей в скорости.

Например, можно осуществлять одновременное слежение за изменениями поступающих значений мгновенных скоростей, характеризующих программные движения соответственно мобильной ракетной стартовой платформы – в единицах с физической размерностью $км/час$, и выпушенной из нее же ракеты – в единицах $км/сек$.

Непротиворечивость случая, когда физическая размерность единицы измерения некоторой координатной оси x_i

содержит время, по физической размерности отличающимся от единицы времени соответствующей координатной оси t_i, можно пояснить следующим наглядным примером:

Пассажир автомобиля, имеющий секундомер может в любую секунду определить по спидометру соответствующую этой секунде мгновенную скорость автомобиля в единицах, физическая размерность которых включает часы. Секунды отсчитываются в нашем примере на координатной оси времени t_i, а мгновенные скорости, выраженные в единицах с физической размерностью $км/час$, определяются по их проекциям на соответствующую координатную ось x_i.

Очень важно, что вовсе не требуется унифицировать различные встречающиеся зависимые физические размерности.

Напротив, в определенных случаях, за счет надлежащего преднамеренного изменения значений масштабов для некоторых единиц измерения координатных осей x_i, можно добиться снижения дисбаланса в наблюдаемых скоростях изменений показаний соответствующих датчиков и, тем самым, создать более комфортные условия для осуществления слежения.

Не исключаются случаи, когда некоторые единицы измерения координатных осей x_i, могут быть охарактеризованы вообще безразмерными величинами (например, такими как числа, характеризующие критерии подобия или, еще проше, как числа, получаемые из отношения двух

величин, имеющих одинаковые физические размерности).

Мы предвидим, что в деле определения различающихся физических размерностей для единиц измерения координатных осей x_i, какие-либо осложнения не возникнут.

То же самое можно утверждать и в отношении выбора фиксированных длин для соответствующих единиц измерения координатных осей.

Действительно, согласно постановке проблемы глобального наблюдения, процесс слежения во всякий момент времени t и на каждой координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, в конечном итоге, сводится к выяснению взаиморасположения точки $(i_j(t), t)$ относительно трех точек $(a_{ij}(t), t)$, $(b_{ij}(t), t)$ и $(c_{ij}(t), t)$, которые, по сути, совершенно независимы от взаиморасположений аналогичных точек на других координатных плоскостях.

Исходя из такой независимости, мы принимаем, что *длины единиц измерения на всех координатных осях* X_{ij}, *вне зависимости от их физических размерностей, одинаковы и равны некоторой фиксированной величине*.

Впрочем, из следующего простого замечания следует, что при необходимости легко можно отказаться от этого предположения, как от исходного допущения.

Замечание о неодинаковых по длине единицах

Пусть длины e_i^j единиц измерения соответствующих координатных осей X_{ij} – неодинаковы. Тогда, после реализации следую-

щих замен переменных для первых координат произвольных точек $(x_{ij}, t) \in X_{ij} \times t_{ij}$:

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij}\, e_0 \big/ e_i^j \;,\; i = \overline{1, N} \,,\; j = \overline{1, k_i} \;, \tag{1.2.2}$$

мы возвращаемся к исходному допущению. Теперь, единицы измерения этих координатных осей можно считать одинаковыми по длине и равными по длине наперед заданной величине e_0.

Следует особо обратить внимание на то, что преобразования (1.2.2) касаются только лишь длин единиц измерения и не вызывают изменений их физических размерностей.

Учет формул (1.2.2), для координатной идентификации приведенных выше четырех типов точек относительно новой единицы измерения, дает нам следующие соотношения:

$$\hat{a}_{ij}(t) = a_{ij}(t) e_0 \big/ e_i^j \;,\; \hat{b}_{ij}(t) = b_{ij}(t) e_0 \big/ e_i^j \;,$$

$$\hat{c}_{ij}(t) = c_{ij}(t) e_0 \big/ e_i^j \;,\; \hat{i}_j(t) = i_j(t) e_0 \big/ e_i^j \;. \tag{1.2.3}$$

Соотношения (1.2.2),(1.2.3) обеспечивают переход от предположения не идентичности длин единиц измерения для координатных осей X_{ij} к исходному предположению об их идентичности. Для быстрого осуществления этого перехода, в приводимых в книге формулах достаточно будет осуществить следующие простые замены для обозначений:

$$x_{ij} \mapsto \hat{x}_{ij}(t),\; a_{ij}(t) \mapsto \hat{a}_{ij}(t),\; b_{ij}(t) \mapsto \hat{b}_{ij}(t),\; c_{ij}(t) \mapsto \hat{c}_{ij}(t),$$

где $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, $t \in T$.

Следует отметить, что данное замечание не имеет обязательной для приложений силы и, вообще говоря, не рассчитано для исполнения при организации процедур слежения.

Поскольку, отмеченная выше независимость координатных плоскостей и так обеспечивает корректность исходного предположения об идентичности длин единиц из-

мерения координатных осей X_{ij} (см. примечание 1).

Обратим внимание на следующее соображение. Если бы мы, в определении I адаптивной координатной системы, координатные плоскости расположили бы таким образом, что вместо вертикали DD_0 пришлось бы рассматривать ломаную линию, имеющую вершины на начальных точках параллельных координатных плоскостей, то это никак не отразился бы на координатно-измерительных функциях этой координатной системы. Этим обстоятельством мы воспользуемся впоследствии. Тогда же приведем строгое обоснование этого соображения.

Отметим, что некоторую пользу от рассмотрения первой адаптивной координатной системы мы увидим уже в разделе 1.4.

Позже, мы на основе I адаптивной координатной системы введем новую адаптивную координатную систему, которая оказывается более подходящей для реализации предлагаемой геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения. Она не будет особо нуждаться в подробных описаниях, поскольку по строению будет отличаться от I адаптивной координатной системы геометрическими местоположениями осей времени.

Из изложенного выше, возможно пока не очень ясно, как следовало бы интерпретировать в аффинном, метрическом или топологическом смысле подмножество пространства R_3, которое использовано (задействовано) в конструкции адаптивной координатной системы.

Неизвестен также обоснованный ответ на вопрос о размерности адаптивной координатной системы.

Ответы на эти вопросы даны в следующем разделе.

Примечание 1:

Рассмотрим следующий пример.

Физические размерности величин секундного – $кг/сек$, и часового расхода топлива – $кг/час$, для некоторых двух одновременно контролируемых тепловых машин, различаются, однако являются зависимыми величинами. Тем не менее, мы полагаем, что обе соответствующие им единицы измерения, как и все остальные в адаптивной координатной системе, имеют одинаковые длины.

Тем самым, организатор процедуры наблюдения избавляется от утомительной необходимости совершать хоть и правильные (конечно, только для величин, имеющих зависимые физические размерности), но фактически ненужные выборы среди отличающихся по длине отрезков, для соотнесения их к единицам измерения соответствующих координатных осей.

В итоге, становится ненужным решение «головоломок», связанных с дифференцированным выбором длин единиц измерения для многочисленных координатных осей X_{ij} первой адаптивной координатной системы

1.3. МНОГООБРАЗИЕ ГРАФОВ

Определение 1.3.1. *Лишенную осей времени первую адаптивную координатную систему будем называть стационарной координатной системой.*

Ниже, говоря о каком либо преобразовании координатной оси, мы имеем в виду действие этого преобразования ко всем точкам этой координатной оси. Далее, все рассматриваемые ниже преобразования вращения в евклидовом пространстве R_n осуществляются вокруг начала координат. Мы намеренно отдаем предпочтение вращениям по координатным плоскостям, поскольку при появлении необходимости их без затруднений можно описать простыми формулами вращения на соответствующих двумерных координатных плоскостях.

Лемма 1.3.1. *Конгруэнтные преобразования координатных осей n - мерной прямоугольной декартовой координатной системы x_i' из эвклидова пространства R_n, приводящие их к совпадению с соответствующими (по индексам) координатными осями x_i, $i=\overline{1,n}$, стационарной координатной системы, можно осуществлять гомеоморфным образом, а именно путем многократного применения подходящих непрерывных групповых преобразований вращения и параллельного переноса к преобразуемым координатным осям.*

Доказательство. Для начала из конструкции адаптивной координатной системы удалим оси времени. Оставшиеся на несущей плоскости все оси x_i, стационарной

координатной системы, могут быть истолкованы как «демонтированные» координатные оси x'_i, $i=\overline{1,n}$, некоторой фиксированной прямоугольной декартовой координатной системы из эвклидова пространства R_n. Мы должны показать, что «демонтаж» этой координатной системы можно реализовывать посредством гомеоморфизма.

Введем следующее обозначение. В пространстве R_n координатную плоскость, определяемую координатными осями x'_i и x'_j, обозначим символом M_{ij}, $i \neq j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Плоскость M_{12} – двумерная, и ее с точностью до преобразований вращения и параллельного переноса условимся считать несущей плоскостью. Осуществим на этой плоскости параллельный перенос оси x'_1 так, чтобы получить равенство $x_1 = x''_1$.

Здесь и далее в доказательстве символом x''_i обозначена преобразованная координатная ось x'_i, $i=\overline{1,n}$, а равенства понимаются с только что отмеченной точностью. Условие несовпадаемости осей x_1 и x'_1 обеспечивается при любом ненулевом параллельном переносе.

Затем, координатную ось x'_2 сначала, путем вращения на плоскости M_{12}, приведем на освободившееся место оси x'_1, а потом осуществим такой параллельный перенос этой оси, чтобы у нас получилось равенство $x_2 = x''_2$.

После выполнения этих преобразований в нашем рас-

поряжении оказываются два освободившихся места, занятые до применения преобразований первыми двумя координатными осями исходной прямоугольной декартовой координатной системы x_i' пространства R_n.

Двумя вращениями, поочередно выполняемыми на плоскостях M_{23}, M_{12}, и приводящими координатную ось x_3' на освободившиеся места сначала оси x_2', а затем оси x_1', мы одним соответствующим преобразованием параллельного переноса на несущей плоскости добьемся совпадения осей: $x_3 = x_3''$.

Продолжая по индукции, мы приходим к равенствам $x_i = x_i''$ (при этом каждая координатная ось x_i' декартовой координатной системы из пространства R_n подвергается $i-1$ раз вращениям и один раз параллельному переносу, так что, общее число преобразований будет равным $n(n+1)/2$).

Выше, при выполнении вращений и переносов мы не имели дело с явлением слипания преобразуемых координатных осей. Следовательно, требование взаимнооднозначного соответствия может нарушиться разве что при отображении начальной точки.

Однако в записи $O'(0,0,...,0)$ – начала координат n -мерной декартовой координатной системы, нуль из i - того места, в действительности имеет отношение только к начальной точке координатной оси x_i', $i = \overline{1,n}$. Поэтому и считается, что координатная запись начала координат n -мерной декартовой координатной системы, представляет

собою упорядоченное объединение координат начальных точек координатных осей x_i'. Т.е. одномерные точки объединяются (в упорядоченном порядке) и образуют одну многомерную точку. В противном случае, начальная точка в R_n безусловно была бы одномерной точкой.

При такой естественной интерпретации начала координат $O'(0,0,...,0)$, становиться ясным, что при описанных выше конгруэнтных преобразованиях требование взаимнооднозначности *для координат точек* сохранится и при отображениях начальных точек координатных осей.

Каждое из использованных выше обратимых и непрерывных в обе стороны преобразований описывается обычными формулами вращения и параллельного переноса на двумерных плоскостях (см. примечание 2). Это создает очевидную возможность для построения (в явном виде) композиции описанных преобразований для точек каждой оси x_i', $i=\overline{1,n}$.

Так что упомянутый выше «демонтаж» осей действительно можно осуществить взаимнооднозначным и непрерывным в обе стороны отображением, т.е. гомеоморфизмом, действующим на множестве координат точек соответствующих преобразуемых координатных осей.

Лемма доказана.

Примечание 2:

В доказательстве леммы 1.3.1 непрерывность «в обе стороны» преобразования, как обычно, понимается в том смысле, что малым изменениям прообразов соответствуют малые изменения образов преобразования и обратно.

Строгое определение непрерывности предполагает введения тополо-

гии. Но, традиционно вводимая в метрическом пространстве R_n фундаментальная система окрестностей из n - мерных открытых шаров, делает очевидным, вид фундаментальной системы окрестностей и на координатных осях: каждому n - мерному шару отвечает набор из n проекций шара на координатные оси, являющимися обычными интервалами. В силу равенств $x_i = x_i''$, $i = \overline{1,n}$, образами этих интервалов являются интервалы на соответствующих координатных осях стационарной координатной системы. Так что описанные в лемме преобразования конструктивным образом устанавливают топологию на множестве, состоящем из точек n параллельных прямых линий на несущей плоскости.

В итоге, использованное в лемме понятие непрерывности преобразований получает строгое обоснование.

С практической точки зрения роль понятия гомеоморфизма в задачах слежения определяется тем, что благодаря гомеоморфному отображению при малых изменениях показаний датчиков (прообразов отображения) исключаются скачкообразные изменения местоположений соответствующих точек – образов отображения (взаимнооднозначным образом устанавливаемых показаниями этих датчиков) в адаптивной координатной системе, причем справедливо и обратное утверждение.

В результате наблюдатель, конечно, получает более адекватное представление о характере изменений показаний датчиков.

Следующее утверждение обнаруживает важное, хотя и несколько необычное на первый взгляд свойство стационарной координатной системы.

Теорема 1.3.1. *С помощью стационарной координатной системы на двумерной плоскости можно построить n - мерное аффинное многообразие, состоящее из некоторой совокупности 0 - графов и гомеоморфное евклидовому пространству* R_n.

Доказательство основано на лемме 1.3.1 и утверждении о том, что размерность пространства является топологическим инвариантом, т.е. не меняется при гомеоморфизмах (этот крупный результат исторически стал известным с 1913-го года, благодаря Брауэру [3]).

Для того чтобы дополнительно не применять к координатным осям преобразования типа растяжения-сжатия, условимся, что длины единиц измерения выделенной декартовой координатной системы пространства R_n и соответствующей ей стационарной координатной системы одинаковые.

В этом случае описанное в лемме гомеоморфное отображение в алгебраическом смысле действует как тождественное преобразование.

Действительно, пусть произвольно фиксированная точка произвольной координатной оси x_i', $i=\overline{1,n}$, декартовой координатной системы пространства R_n имеет n- мерную координату вида: $(0,\ldots,0,a,0,\ldots,0)$, где число a находится на i- том месте, а число нулей равно $n-1$.

Эта точка при действии описанного выше гомеоморфного отображения, в качестве своего единственного образа, очевидно, будет иметь совокупность из n точек с одномерными координатами на соответствующих осях стационарной координатной системы.

При этом в силу равенств $x_j = x_j''$, $j=\overline{1,n}$, и общности длин единиц измерения, точка, которая окажется при гомеоморфном отображении на оси x_i стационарной координатной системы, будет иметь координату, равной той же

величине a, а на других осях остальные $n-1$ точек будут иметь нулевые координаты.

Справедливо и обратное соответствие.

Далее, точек координатных осей x_i', $i=\overline{1,n}$, можно рассматривать в качестве проекций соответствующих точек пространства R_n, а между точками и n - мерными совокупностями их проекций, естественно, что существует взаимнооднозначное соответствие.

Это соответствие тривиальным образом устанавливает гомеоморфизм, поскольку близость двух точек из метрического пространства R_n по определению метрики (эвклидовой) равносильно близости их проекций и обратно.

Композиция этого гомеоморфизма с предыдущим гомеоморфизмом из леммы 1.3.1, определяет новый гомеоморфизм. Он устанавливает гомеоморфное отображение пространства R_n на некоторое множество, состоящее из совокупностей n точек из пространства R_2. Каждый из этих точек принадлежит только и только одному из n параллельных линий, на которых собственно и расположены оси стационарной координатной системы.

При действии этого гомеоморфизма каждая точка пространства R_n, имеющая декартовые координаты:

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right)$$

перейдет в точки с одномерными координатами a_i на соответствующих осях x_i стационарной координатной системы, $i=\overline{1,n}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Итак, мы установили гомеоморфное отображение пространства R_n на некоторое множество совокупностей из n точек в пространстве R_2. Каждую совокупность из таких n точек можно рассматривать в качестве n вершин некоторого 0 - графа на плоскости (*нуль граф*, по терминологии теории графов, это граф, не имеющий ребер).

Далее, утверждение о том, что размерность пространства – топологический инвариант означает, что размерность при гомеоморфизмах не меняется. Откуда, мы заключаем, что описанный выше гомеоморфизм определяет на построенном нами множестве 0 - графов структуру n - мерного многообразия. Это многообразие обозначим символом Ω_0.

Многообразие Ω_0, очевидно, имеет одну тривиальную карту, совпадающую с самим пространством R_n.

Как известно, аффинная структура, метрика и соответствующая метрическая топология пространства R_n легко описываются координатным способом (или, как иногда говорят, их определяют на «языке» координат). Более того, в случаях, когда $n > 3$, координатный способ, по сути, оказывается единственным способом, применяемым для описания геометрии пространства R_n.

Описанный выше гомеоморфизм был определен с помощью координат (некоторые дополнительные подробности об этом приведены в примечании 4).

Следовательно, с помощью этого гомеоморфизма вполне естественным и очевидным образом можно перенести

на многообразие 0 - графов Ω_0 аффинную структуру, метрику и соответствующую топологию эвклидового пространства R_n.

При этом оказывается корректным употребление для совокупности вершин 0 - графа с координатами a_i, $i = \overline{1,n}$, в стационарной координатной системе, обозначения вида:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)_2 .$$

Здесь последний (справа) нижний индекс указывает на то, что граф геометрически расположен на двумерной несущей плоскости.

Теперь, построенное выше гомеоморфное отображение символами можно изобразить в виде:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \xleftrightarrow[Hom]{} (a_1, a_2, \dots, a_n)_2, \qquad (1.3.1)$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_n$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)_2 \in \Omega_0 \subset R_2$.

Теорема доказана.

Действуя по следующему общему правилу, каждому нуль-графу $(a_1, a_2, \dots, a_n)_2 \in \Omega_0$ можно взаимнооднозначным образом сопоставить один односвязный граф на несущей плоскости.

Общее правило: *для любого 0 - графа из многообразия Ω_0 соединить одним и только одним неориентированным ребром каждые две его вершины, расположенные на ближайших соседних осях стационарной координатной системы.*

Ниже, мы будем относиться к общему правилу как к неизменному, раз навсегда установленному правилу. В результате применения общего правила ко всем элементам многообразия Ω_0, мы получим на несущей плоскости некоторое множество односвязных и неориентированных n - вершинных графов. Обозначим это множество символом Ω_1. Между многообразием Ω_0 и множеством Ω_1 существует взаимнооднозначное соответствие, заданное действием общего правила.

Важно подчеркнуть, что ребра графов из множества Ω_1, вообще говоря, не имеют прямого отношения к координатно-измерительным функциям стационарной координатной системы, т.е. в этой системе отсчета никак невозможно определить координаты точек, не принадлежащих координатным осям. Последнее обстоятельство, наряду с важным соотношением (1.3.1), позволяют нам заключить, что рассматриваемая стационарная координатная система является n - мерной измерительной системой.

Таким образом, в стационарной координатной системе нельзя определять координаты точек ребер, не являющихся вершинами графа. Для определения координат точек ребер графов, несомненно, можно без всяких осложнений прибегнуть к помощи какой-либо другой, дополнительной двумерной декартовой координатной системы на несущей плоскости (чем мы позже воспользуемся).

Отображение (1.3.1) устанавливает гомеоморфизм строго между евклидовом пространством R_n и многообразием Ω_0. Ребра же, добавляемые согласно общему пра-

вилу для соединения вершин нуль графов, несмотря на то, что они определяются взаимнооднозначным образом этими вершинами, не имеют прямого отношения к гомеоморфизму (1.3.1).

Иначе говоря, правая сторона отображения (1.3.1) не включает в себе координаты каких-либо точек (и в частности, не концевых точек ребер графов) на несущей плоскости, не принадлежащих координатным осям стационарной координатной системы.

Итак, часть несущей плоскости, не содержащая точек координатных осей стационарной координатной системы, не имеет никакого отношения к многообразию Ω_0.

Однако, это вовсе не означает, что мы не сможем воспользоваться преимуществом расположения координатных осей стационарной координатной системы на двумерной плоскости.

Действительно, согласно общему правилу каждый граф из множества Ω_1, взаимнооднозначным образом определяется координатами a_i, $i=\overline{1,n}$, своих вершин.

Следовательно, принадлежащие многообразию Ω_0 координаты вершин графа вполне можно принять в качестве координат самого графа, принадлежащему множеству Ω_1.

По определению, общее правило конструктивным образом устанавливает такое взаимнооднозначное отображение между элементами многообразия Ω_0 и множества Ω_1, при котором координаты образов и прообразов отображения оказываются тождественно одинаковыми.

Стало быть, теперь одним общим обозначением:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)_2,$$

мы можем описать не только координаты любого 0 - графа из многообразия Ω_0, но и координаты соответствующего ему при взаимнооднозначном отображении графа из множества Ω_1.

Признак общности координат позволяет нам тождественным образом перенести на множество Ω_1 аффинную структуру, метрику и соответствующую топологию многообразия Ω_0. Этот же признак достаточен, для того чтобы можно было утверждать, что множество Ω_1 является n - мерным многообразием, имеющим одну карту, тождественно совпадающую с пространством R_n.

С учетом вышесказанного, аналог гомеоморфного отображения (1.3.1) для рассматриваемого случая можно изобразить в виде:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \underset{HOM}{\longleftrightarrow} (a_1, a_2, \dots, a_n)_2, \qquad (1.3.2)$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_n$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)_2 \in \Omega_1$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. *С помощью стационарной координатной системы на обычной двумерной плоскости можно построить n - мерное аффинное многообразие, состоящее из односвязных графов и гомеоморфное евклидовому пространству R_n.*

Эта теорема обнаруживает важное, хотя и несколько необычное на первый взгляд свойство стационарной коор-

динатной системы, поскольку многое из того, что выше описывается в связи с многомерностью, имеет место на обычной двумерной плоскости.

Ребра графов определяются координатами своих вершин, и на основе применения общего правила, они рассчитаны только и только для создания целостных односвязных структур на плоскости. Теперь, очевидно, что при исходном предположении об одинаковости течения времени на всех координатных осях t_i, $i = \overline{1,n}$, адаптивная координатная система будет $n+1$- мерной.

Определение 1.3.2. *Координаты* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_2$ *вершин 0 - графа из многообразия* Ω_0, *или соответствующего ему, согласно общему правилу, графа из многообразия* Ω_1, *будем называть стационарными координатами этих графов.*

Примечания:

3. Доказательство соотношения (1.3.2) можно провести по иной схеме. А именно, после формального построения стационарной координатной системы и введения общего правила, можно исходить из очевидности того, что соотношение (1.3.2) является взаимнооднозначным соответствием. Затем следует доказать, что это соответствие определяет гомеоморфизм. Однако, основываясь на собственном опыте, могу утверждать, что при более кратких и несколько формальных подходах психологически оказывается трудным надолго и всерьез поверить в правильность отображения (1.3.2). Поскольку, образно говоря, выявляется следующая довольно интересная ситуация: – Несущая плоскость двумерна, однако имеющегося в ней «места» вполне достаточно для образования из части ее и, самое главное, в ней же, многомерных структур.

В итоге, отображение (1.3.2), обеспечивая изоморфизм и изо-

метрию, позволяет координатным способом и гомеоморфным образом «спроецировать» аффинную структуру n - мерного пространства $R_n = R_1 \times R_1 \times ... \times R_1$ в n - мерную аффинную структуру многообразия Ω_1, элементы которого – односвязные графы и располагаются в двумерном пространстве $R_2 = R_1 \times R_1$, т.е. являются объектами теории плоских графов.

Выбор не очень краткого пути, для проведения доказательств, не случаен. Для того чтобы исключить намека даже на малейшие сомнения, мы постарались, что приведенные выше доказательства были как можно более конструктивными и геометрически наглядными.

4. Стационарная (или адаптивная) координатная система, вообще говоря, не была задумана для изображения векторов из пространства R_n. Тем не менее, осмысление сути возможных изменений аффинного репера пространства R_n, при действии гомеоморфизма (1.3.2), представляется полезным.

Может показаться, что при гомеоморфном отображении векторы репера, теряя общее начало, должны были бы трансформироваться в параллельные векторы стационарной координатной системы. При этом сразу же возникнет следующий парадокс.

С одной стороны, параллельность векторов стационарной координатной системы не может означать, что они коллинеарные, т.е. линейно зависимы. Это, явно противоречило бы, свойству топологической инвариантности отображения (1.3.2). Но, с другой стороны, коллинеарность векторов, как раз по определению означает, что векторы располагаются на параллельных прямых линиях. Это требует разъяснения. Дело в том, то важная специфика рассматриваемого многообразия графов заключается в том, что здесь односвязные графы определяются и описываются исключительно координатным способом. Этот способ, в силу отображения (1.3.2), с точностью до гомеоморфизма совпадает с существующим координатным способом, применяемым для описания аффинной геометрии пространства R_n, т.е. описания геометрии без употребления век-

торов. Далее, элементами многообразия Ω_1, естественно, являются только графы и поэтому согласно гомеоморфизму (1.3.2) и определению вектора, в геометрии многообразия графов каждый вектор пространства R_n можно изображать в виде двух графов и то в случае, если при этом мы ограничимся изображениям образов крайних точек вектора. Эти графы, соответствуют начальному и конечному положению вектора в пространстве R_n, и очевидно, не могут считаться равноправными, что связано с наличием у вектора направления. Аналогично при действии гомеоморфизма (1.3.2), крайние точки каждого вектора аффинного репера координатной системы пространства R_n будут иметь в качестве своих образов два неравноправных односвязных графа в многообразии Ω_1.

Парадокс показывает, что стационарная координатная система не приспособлена для изображения векторов из пространства R_n в виде направленных отрезков (общепринятых для очерчивания векторов). Надо сказать, что аналогичный парадокс для самих координатных осей стационарной координатной системы был нами разрешен в доказательстве леммы 1.3.1, путем:

1) жесткого и геометрически наглядного связывания каждой координатной оси с одним и только с одним измерением пространства R_n;

2) «исключения» из рассмотрения той части пространства R_2, которая является дополнением к множеству всех точек, расположенных на осях стационарной координатной системы.

Таким образом, в действительности часть пространства R_2, не принадлежащая к координатным осям, не имеет никакого отношения не только к координатно-измерительным функциям стационарной координатной системы, но и вообще к многообразию Ω_0.

Переход к многообразию Ω_1 нам был нужен только и только в целях достижения наглядности, и оказался возможным благодаря тому, что стационарные координаты односвязных графов и соответствующих им нуль - графов тождественно одинаковы.

При переходе к многообразию Ω_0, вмещающее это многообразие двумерная плоскость фактически теряет свойство однородности (или в соответствии с физической аналогией – свойство быть сплошной плоской средой), и вместо точек плоскости, мы имеем дело с точками координатных осей стационарной координатной системы. Значит, не только обычные двумерные векторы на плоскости, но и всевозможные операции, выполняемые над ними, не могут быть описаны в координатах стационарной координатной системы. Это справедливо и для любого двумерного вектора несущей плоскости, целиком расположенного на некоторой координатной оси стационарной координатной системы. Поскольку для точек таких векторов в этом случае неопределенными будут их координаты, определяемые по всем остальным координатным осям стационарной координатной системы. В частности, классическое понятие линейной независимости для векторов из пространства R_2, вводимое с помощью обычных аффинных операций, лишается привычного своего смысла на подмножестве пространства, состоящем исключительно из точек параллельных линий, являющихся в свою очередь носителями стационарной координатной системы.

5. В отличие от размерности, полнота в общем случае не является топологическим инвариантом. Это значит, что полнота, может быть, и не сохранится при гомеоморфном отображении (1.3.2).

Тем не менее, можно показать, что многообразие Ω_1 обладает свойством полноты. Это обстоятельство, наряду с теоремой 1.3.2, создает, по-видимому, некоторые благоприятные условия для сведения некоторых многомерных задач (в первую очередь экстремальных) из пространства R_n к эквивалентным многомерным, но зато геометрически наглядным задачам на плоскости, приводящие нас к соответствующим задачам хорошо развитой теории графов.

По-видимому, здесь к месту вспомнить, что теория графов в свою очередь имеет тесные связи с такими научными дисциплинами как комбинаторика, теория групп, информатика и др.

1.4. ПРОБЛЕМА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НАГЛЯДНОСТИ В МНОГОМЕРНЫХ ЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теорема 1.3.2 в определенном смысле создает основу для наших дальнейших действий. Она тесно связана с частью предлагаемой геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения.

В самом деле, так как показания отдельных датчиков, вообще говоря, не связаны между собой, то их можно считать независимыми. Следовательно, для того чтобы можно было геометрически изображать независимые показания n датчиков, с целью образования из них единой геометрической структуры, нам конечно же нужно иметь некоторое геометрическое место, вмещающее n независимых измерений.

Так мы приходим к необходимости рассмотрения эвклидового пространства R_n.

Но, эвклидово пространство $R_n\,(n > 3)$ не располагает геометрической наглядностью и, стало быть, не пригодно для ведения слежений. Однако установленное выше гомеоморфное отображение (1.3.2) обнаруживает, что слежение заведомо можно осуществлять на двумерной плоскости, причем без всяких потерь информации, связанной с показаниями датчиков.

Любопытно отметить, что теорема 1.3.2 выявляет простую версию для частичного и косвенного решения общей проблемы, связанной с геометрической наглядностью в пространствах $R_n\,(n > 3)$. Покажем это.

На самом деле, отображением (1.3.2) каждой конечной точке пространства R_n гомеоморфным образом сопоставляется односвязный граф в стационарной координатной системе (на несущей плоскости).

Далее, произвольное движение этой точки в евклидовом пространстве R_n взаимнооднозначным образом определяет соответствующее движение графа на несущей плоскости. Более того, в силу гомеоморфизма (1.3.2), малые движения точки в пространстве R_n, вызывают малые движения вершин соответствующего графа на осях стационарной координатной системы, т.е. соответствующие движения этих вершин не будут скачкообразными.

В силу инвариантности значений стационарных координат относительно отображения (1.3.2), даже метрики пространства R_n и многообразия Ω_1 мы можем считать тождественными. По этой же причине аффинная структура пространства R_n тождественно изоморфна аффинной структуре многообразия графов.

Интересно, что трудности, возникающие в связи с изображениями графов с очень длинными ребрами, в принципе преодолимы теми средствами, которыми мы попозже воспользуемся при решении проблемы глобального наблюдения (отметим, что при применении этих средств изометризм потеряется, однако изоморфизм между пространством R_n и многообразием графов Ω_1 сохранится).

В итоге, геометрическая наглядность достигается, конечно, за счет того, что несущая плоскость двумерная и, стало быть, является объектом п л а н и м е т р и и.

Однако говорить о полном решении проблемы, связанной с геометрической наглядностью в пространствах $R_n\,(n>3)$, совершенно недопустимо. Поскольку по мере роста количества точек из эвклидового пространства R_n, одновременно изображаемых графами, на несущей плоскости могут возникать все более сложные для зрительного, или даже мысленного восприятия затейливые сплетения, состоящие из пересекающихся графов, что способствует исчезновению геометрической наглядности.

Геометрическая наглядность реально достигается в случаях одновременного изображения графами на несущей плоскости либо большого количества точек эвклидового пространства R_n, не имеющих между собой общие координатные элементы (а также при изображениях их движений, см. рис.2), либо же малого количества точек с произвольными координатами (см. рис.3).

На рис.2 приведены изображения в виде непересекающихся графов 11-ти точек из пространства R_7, имеющих декартовые координаты:

$$\left(d+7.5,\; d+5,\; d-2.5,\; d+3.75,\; d,\; d+2.5,\; d\right),$$

где $d=-\overline{5{,}5}$. Стационарные координаты этих точек записываются в виде:

$$\left(d+7.5,\; d+5,\; d-2.5,\; d+3.75,\; d,\; d+2.5,\; d\right)_2.$$

Каждый изображенный пунктирными линиями граф может быть получен от графа A0 покоординатными сдвигами на соответствующую величину d.

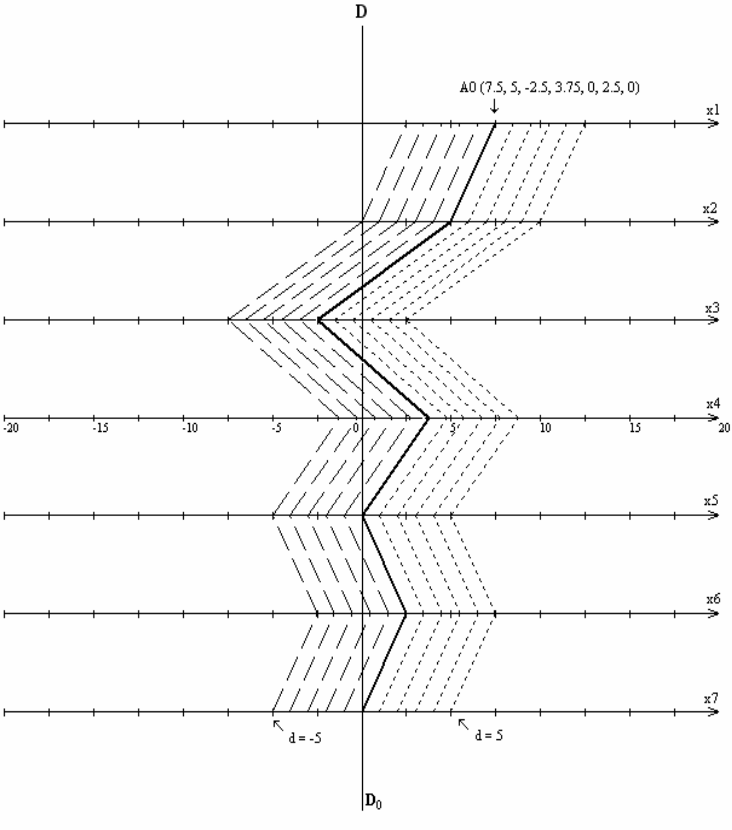


Рис. 2. Семимерная стационарная координатная система в соответствии с утверждением леммы 1.3.1 состоит из «демонтированных» координатных осей прямоугольной декартовой координатной системы пространства R_7. Все координатные оси на рисунке имеют общую единицу измерения с длиной равной 2.5. Расстояния между параллельными координатными осями, а также часть пространства R_2, находящаяся вне этих осей, не имеют никакого отношения к измерительным функциям стационарной координатной системы.

Из рисунка ясно, что в случае не пересечения графов, общее количество изображаемых в стационарной координатной системе графов, не приводящих к исчезновению геометрической наглядности, может быть произвольным.

На рис.3 видно, что те графы, соответствующие стационарные координаты которых отличаются между собой только знаками, располагаются на несущей плоскости симметрично относительно вертикальной линии DD_0.

Для различения графов, имеющих общие вершины, желательно рядом с их изображениями указать их стационарные координаты. В противном случае, могут появляться разночтения, поскольку такие же изображения будут иметь графы, имеющие стационарные координаты:

$$(5, 2.5, 2.5, 0, -10, -10, 0)_2\ ,\ (-5, -2.5, -2.5, 0, 10, 10, 0)_2\,.$$

Однако разночтения не появляются при изображениях пересекающихся графов P и Q. Сравнения, проведенные с этими графами показывают, что указанного типа разночтения могут появляться тогда, когда два или более графов имеют хотя бы одну общую не крайнюю вершину, т.е. общую вершину, расположенную на одном из промежуточных координатных осей: $x2$, $x3$, $x4$, $x5$, $x6$.

В стационарной координатной системе трудно рассчитывать на получение ясных изображений для геометрических фигур из многомерных пространств. Тем не менее, по-видимому, было бы преждевременно заключить, что сама проблема получения отчетливых изображений для геометрических фигур из многомерных эвклидовых пространств неразрешима (по этому поводу см. примечание 6).

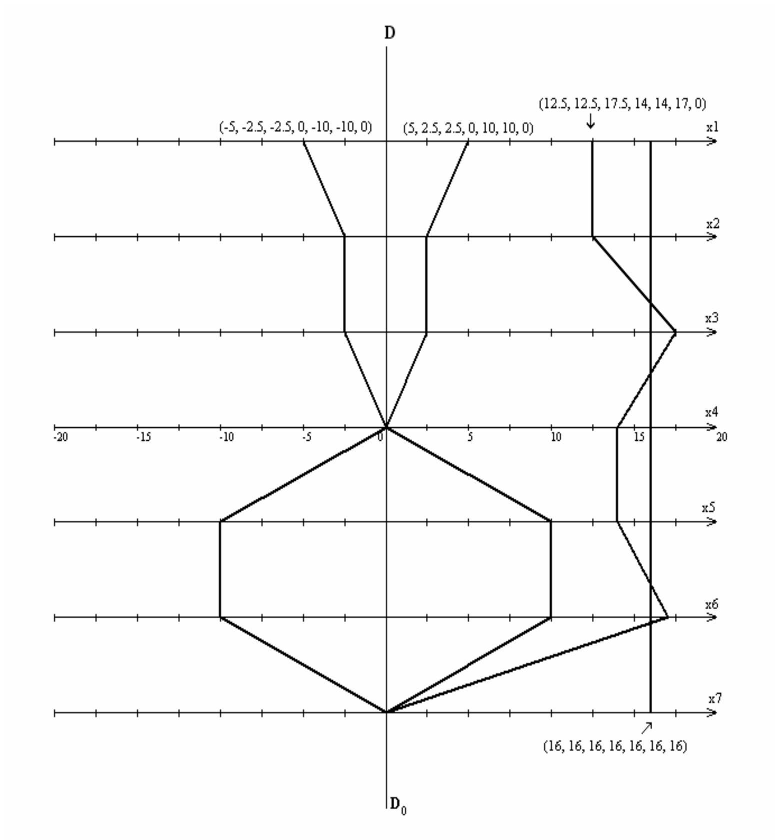


Рис.3. Координатные оси семимерной стационарной координатной системы имеют общую единицу измерения с длиной равной 2.5. На плоскости изображены в виде графов четыре точки из пространства R_7 , имеющие декартовые координаты:

$$(5, 2.5, 2.5, 0, 10, 10, 0),\ (-5, -2.5, -2.5, 0, -10, -10, 0),$$
$$(16, 16, 16, 16, 16, 16, 16),\ (12.5, 12.5, 17.5, 14, 14, 17, 0).$$

(*продолжение текста рисунка вначале стр.63*)

Стационарные координаты этих же точек записываются соответственно в виде:

$$A(5,2.5,2.5,0,10,10,0)_2,\ B(-5,-2.5,-2.5,0,-10,-10,0)_2,$$
$$P(16,16,16,16,16,16,16)_2,\ Q(12.5,12.5,17.5,14,14,17,0)_2.$$

Примечание 6:

Самостоятельный интерес представляют некоторые выходящие за рамки нашей основной цели возможности, связанные с изображениями точек из пространства Минковского, т.е. четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1. Этому пространству, лишенному геометрической наглядности ввиду его размерности, принадлежит важная роль вмещающего пространства в специальной теории относительности А.Эйнштейна.

В общепринятой координатной системе для этого пространства одна из координатных осей непосредственно связана со временем (точнее, произведением времени на скорость света). Возможно такое «нарушение» однородности, также является одной из причин, приводяшей к тому, что соответствующая 4 - мерная стационарная координатная система становится сомнительно эффективным средством для изображений точек из пространства Минковского. Причем, несмотря на то, что косвенно геометрическая наглядность все-таки достигается.

Иначе говоря, мы сможем, не нарушая гомеоморфизма, отчетливо изображать точки этого пространства на двумерной плоскости в виде четырех вершинных графов, однако, по-видимому, можем скорее утверждать то, что полученная геометрическая картина не окажется полезной с точки зрения физических представлений.

С надеждой стимулирования поисков в этом направлении отметим, что для косвенного решения проблемы геометрической наглядности можно обходиться без условия параллельности координатных осей, выделенных для пространственных переменных. Поскольку переход в новые геометрические пространственные положения для этих осей в принципе можно осуществлять посредством конечного числа непрерывных обратимых преобразований переноса

и вращения. Можно осуществить ряд других непрерывных групповых преобразований, не нарушающих гомеоморфизм типа (1.3.2) (кстати позже, в IV главе, мы воспользуемся этой возможностью для эквивалентного представления картины наблюдения в циферблатной форме).

Сложность проблемы, по-видимому, заключается в том, что при разработке новых версий для косвенного решения проблемы геометрической наглядности в пространстве Минковского, с одной стороны, необходимо позаботиться о сохранении гомеоморфизма типа (1.3.2) и, с другой стороны, не следует, конечно, забывать о сигнатуре этого пространства, отличного от сигнатуры обычного 4 - мерного эвклидова пространства.

Учитывая свойства определяемой этой сигнатурой метрики, нужно постараться добиться такого расположения координатных осей в трехмерном евклидовом пространстве, чтобы по достижению соответствующей геометрической наглядности, полученные геометрические картины по возможности адекватно соответствовали хотя бы некоторым реальным физическим представлениям, вытекающим из специальной теории относительности.

ГЛАВА II. ИДЕЯ УПРОЩЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЯ

В разделе 2.1 введены простые и, как это ни удивительно на первый взгляд, вполне естественные для геометрической конструкции адаптивной координатной системы понятия плоскости и поверхности времени.

В разделе 2.2 в пространстве R_n дополнительно определена еще одна координатная система – трехмерная декартовая координатная система, которой придается статус неподвижного пространственного ориентира. Относительно этого ориентира в дальнейшем определяются действия различных преобразований, осуществляемых в адаптивной координатной системе. Здесь же вводятся важные понятия оптимальной вертикали и «очерчиваемой» ею оптимальной плоскости.

В разделе 2.3 оптимальная плоскость, в результате действий, определенных здесь же (в качестве примера) формальных преобразований, будет содержать образы всех оптимальных точек. Это означает, что относительно дополнительной декартовой координатной системы численные значения пространственных координат образов всех оптимальных точек будут одинаковыми. Более того, мы увидим, что действиями формальных преобразований левые и правые граничные точки отображаются на две плоскости, параллельные оптимальной плоскости, и расположенные от нее по левую и правую сторону соответственно.

Тем самым, несмотря на то, что граничные и оптимальные функции как обычные вещественные функции, в принципе в каждый момент времени могут принимать самые различные значения, после действия формальных преобразований, пространственные координаты образов этих точек удается описать

всего тремя постоянными численными значениями, причем в течение всего времени наблюдения. Этот несколько необычный и существенно упрощающий процесс слежения (без потерь информации, связанной с показаниями датчиков) результат достигается, с одной стороны, благодаря своеобразному конструктивному строению I адаптивной координатной системы, а, с другой стороны, связан с особенностями формальных преобразований.

Однако попытка дать безупречную геометрическую интерпретацию самим формальным преобразованиям, в общем случае, наталкивается на трудности, связанные, в частности, с неопределенностью геометрического местоположения поверхности времени в пространстве, выявляющейся в процессе одновременного применения преобразований. Собственно именно из-за наличия такой неопределенности, эти преобразования были названы формальными.

На примере формальных преобразований мы видим, что они, с одной стороны, позволяют предметно излагать описание упрощающей процесс глобального наблюдения идеи и, с другой стороны, выявляют невозможность реализации этой идеи на базе I адаптивной координатной системы.

Отмеченная трудность преодолена в III главе.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ ВРЕМЕНИ

Конструируемые в данной работе адаптивные координатные системы придают обыденный смысл к таким на первый взгляд мистическим понятиям как плоскость или поверхность времени.

Имея в виду то, что каждая ось времени изначально может быть проведена, вообще говоря, через любую точку плоскости, выделенной для осей времени и, кроме того, плотность расположения осей времени на этой плоскости увеличивается пропорционально с возрастанием n, имеет смысл ввести следующее понятие:

Определение 2.1.1. *Плоскость, на которой расположены оси времени, назовем плоскостью времени.*

Плоскость времени выполняет функцию носителя для координатных осей времени.

Расстояния между координатными осями времени, и вообще, вся та часть плоскости времени, расположенная вне прямых осей времени, не существенны для координатно-измерительных функций адаптивной координатной системы.

С момента начала реализации предполагаемых преобразований (сдвига и переноса) координатных осей, прямая линия DD_0 (см. рис.1), превращается в общем случае в ломаную линию с переменной конфигурацией, и имеющую n вершин в начальных точках. Оси времени, «прикрепленные» к этим точкам испытывают параллельные переносы, и плоскость времени преобразовывается в поверх-

ность с переменной конфигурацией. При каждом статическом положении координатных осей времени эта поверхность, состоит из полос плоскостей, каждая из которых ограничивается двумя сторонами, образованными ближайшими соседними осями времени. Каждые такие две полосы, имеющие общую сторону в виде оси времени, примыкают по ней же друг к другу. Эту поверхность назовем *поверхностью времени*.

На рис.4 приведено возможное изображение поверхности времени для некоторого момента времени. Видно, что прямая линия DD_0, указанная в определении I адаптивной координатной системы и содержащая начальные точки $O_{11},\ldots,O_{i-1,k_{i-1}},O_{i1},O_{i2},\ldots,O_{ik_i},O_{i+1,1},\ldots,$ O_{Nk_N}, координатных плоскостей $X_{ij}\times t_{ij}$, после преобразований сдвига для не временных координатных осей, и соответствующих переносов для координатных осей времени, превращается в общем случае в ломаную линию $D'D'_0$, содержащую образы $O'_{11},\ldots,O'_{i-1,k_{i-1}},O'_{i1},$ $O'_{i2},\ldots,$ $O'_{ik_i},$ $O'_{i+1,1},$ $\ldots,$ O'_{Nk_N} начальных точек.

В общем случае, во всякий момент времени каждая точка плоскости $X_{ij}\times t_{ij}$, испытывая преобразование сдвига, может занять в пространстве новое геометрическое местоположение. При этом соответствующими новыми положениями преобразованных координатных осей времени t'_{ij}, в евклидовом пространстве R_3 определяется соответствующая новая геометрическая конфигурация для поверхности времени.

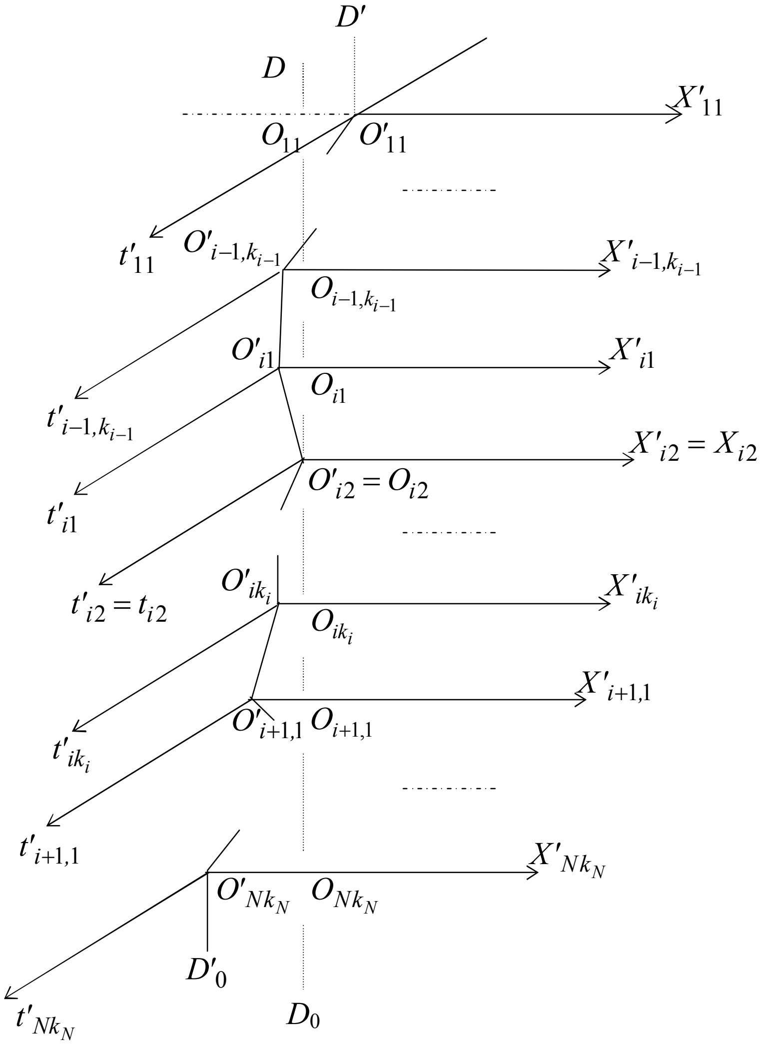


Рис. 4. Поверхность времени – объединение полос плоскости, заключенных между каждыми двумя ближайшими координатными осями времени.

2.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ДЕКАРТОВАЯ КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

Несмотря на то, что построенная выше I адаптивная координатная система состоит из совокупности двумерных декартовых координатных систем, она, как единая целая система отсчета, заведомо не является декартовой координатной системой в евклидовом пространстве R_3. Ибо, здесь в принципе невозможно найти координаты точек, не принадлежащих координатным плоскостям. Поэтому для определения координат, например, не концевых точек ребер графов имеет смысл ввести дополнительную трехмерную прямоугольную декартовую координатную систему.

Для простоты реализации этой идеи воспользуемся уже имеющимися прямыми линиями, выделенными для I адаптивной координатной системы, находящейся в исходном неподвижном положении.

Новую координатную ось x расположим на прямой линии, выделенной для оси X_{11} первой адаптивной координатной системы таким образом, что эти оси, а также их направления совпали. Координатную ось y, разместим по линии DD_0 в направлении идущем снизу вверх. Координатную ось времени t расположим на прямой линии, выделенной для первой (сверху) оси времени, так чтобы эти оси и их направления совпали (см. рис.5). Для обозначения координат точек в новой координатной системе будем использовать обычный декартовый символ:

$$(x, y, t).$$

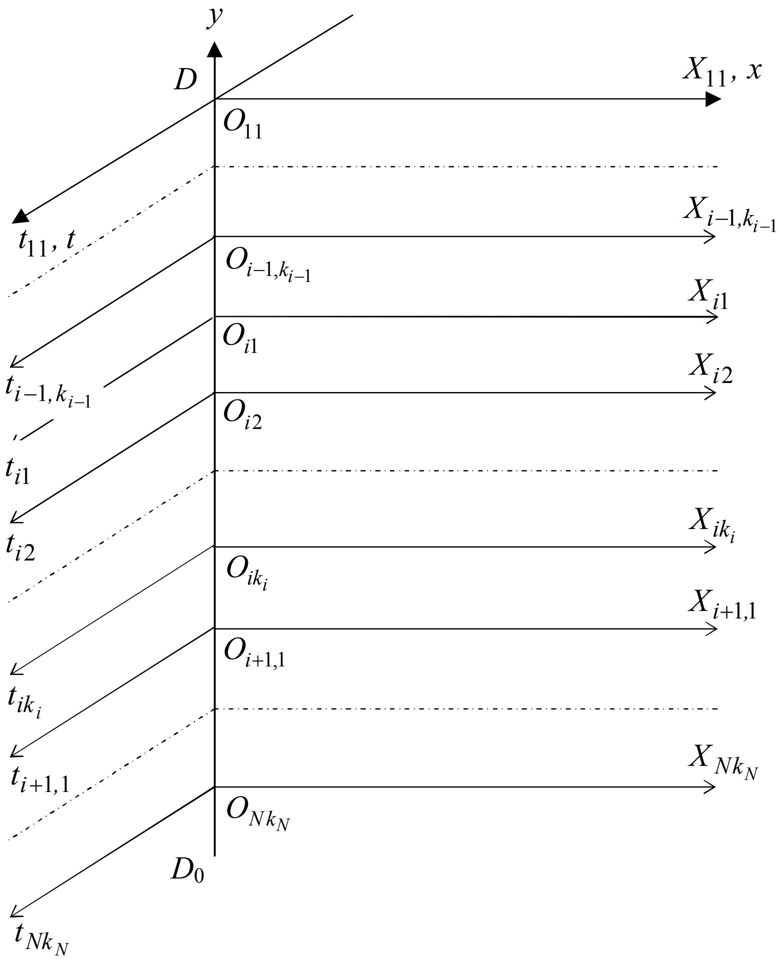


Рис. 5. Пространственные местоположения координатных осей дополнительной прямоугольной декартовой координатной системы относительно неподвижной I адаптивной координатной системы.

Примем, что единицы измерения и начальные точки совпадающих координатных осей одинаковы, а единица измерения координатной оси y, для определенности такая же, как и у координатной оси x.

Мы завершили описание дополнительной трехмерной декартовой прямоугольной координатной системы с координатными осями x, y и t. Для краткости ее в дальнейшем часто будем называть *дополнительной координатной системой*.

В отличие от I адаптивной координатной системы, в этой координатной системе могут быть определены координаты любых точек пространства R_3. В частности, при значении $t = t_0$, дополнительная координатная система пригодна для нахождения координат произвольных точек (x, y, t_0) на несущей плоскости.

Для обозначения точек (а также их координат) координатных плоскостей I адаптивной координатной системы воспользуемся следующим правилом.

Запись

$$F_{ij} = F_{ij}(\tau) = (q, \tau)_{ij} \tag{2.2.1}$$

будет означать, что точка F_{ij} находится на плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, $|q|$ – расстояние от начала координат до проекции точки F_{ij} на ось X_{ij}, иначе говоря, $|q|$ равно величине расстояния между точкой F_{ij} и осью t_{ij} плоскости (или поверхности) времени. Знак q определяется так же, как это общепринято в левой декартовой координатной системе,

построенной на упорядоченных парах осей X_{ij} и t_{ij}, где ось X_{ij} выполняет функции координатной оси абсцисс. Соответственно значение временной координаты определяется расстоянием от точки $F_{ij}(\tau)$ до несущей плоскости (равно $\tau - t_0$).

Величину q будем называть *пространственной адаптивной координатой*, соответственно величину $\tau - t_0$ назовем значением *временной адаптивной координатой* точки $F_{ij}(\tau)$. Часто для этих же координат будем использовать более краткие названия: – *пространственная координата* и *временная координата* соответственно (напомним, что общее для всех осей t_{ij} значения времени мы обозначаем одним символом).

Относительно дополнительной координатной системы точка F_{ij} имеет обычные декартовые координаты $(q, -y_{ij}, \tau)$, где число y_{ij} равно расстоянию между осями $x = x_1 = X_{11}$ и X_{ij} (измеренному по метрике пространства R_3). В частности, $y_{11} = 0$, и в дальнейшем символ y_{ij} мы будем употреблять лишь в только что определенном смысле (см. примечание 7).

Начальную точку координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ обозначим символом O_{ij}, где $O_{ij} = (0, t_0)_{ij}$ или, то же самое, $O_{ij} = (0, -y_{ij}, t_0)$ в координатах дополнительной координатной системы.

Зафиксируем точки координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, соответствующие положениям граничных значений $a_{ij}(\tau)$ и $b_{ij}(\tau)$, оптимальных значений $c_{ij}(\tau)$, а также наблюдаемых значений $i_j(\tau)$ показаний датчиков, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,k_i}$, при некотором значении времени $\tau \in T$.

Согласно правилу записи (2.2.1) и строению дополнительной координатной системы, эти точки теперь можно обозначать соответственно либо символами:

$$A_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), \tau)_{ij}, \ B_{ij}(\tau) = (b_{ij}(\tau), \tau)_{ij},$$
$$C_{ij}(\tau) = (c_{ij}(\tau), \tau)_{ij}, \ H_{ij}(\tau) = (i_j(\tau), \tau)_{ij}, \qquad (2.2.2)$$

либо же их трехмерными декартовыми аналогами.

Например, в привычных декартовых координатах точку $H_{ij} = H_{ij}(\tau)$ можно записать в виде:

$$H_{ij}(i_j(\tau), -y_{ij}, \tau).$$

Отметим, без уточнения подробностей, что обозначения (1.2.1) создают возможности для представления записей (2.2.1) и (2.2.2) в одиночных индексах.

Определение 2.2.1. *Прямую линию, проходящую через точку* $Q_{11}(\tau) = (c_{11}(t_0), \tau)_{11}$, *перпендикулярно к координатной плоскости* $X_{11} \times t_{11}$ *первой адаптивной координатной системы (находящейся в исходном неподвижном положении), назовем* τ *– оптимальной вертикалью (сокращенно: – оптимальной вертикалью) и обозначим символом* $Op(\tau)$, $\tau \in T$.

Пересечения τ - оптимальной вертикали $Op(\tau)$ с координатными плоскостями $X_{ij} \times t_{ij}$ адаптивной координатной системы (находящейся в исходном неподвижном положении), могут происходить только в точках $Q_{ij}(\tau)$ с адаптивными координатами

$$(c_{11}(t_0), \tau)_{ij}$$

или, то же самое, в декартовых координатах дополнительной координатной системы, в точках

$$(c_{11}(t_0), -y_{ij}, \tau) \;\; \forall \tau \in T,\; i = \overline{1, N},\; j = \overline{1, k_i}.$$

Очевидно также, что $C_{11}(t_0) = Q_{11}(t_0)$.

Промежуток времени между τ - оптимальной вертикалью и несущей плоскостью имеет значение $\tau - t_0$.

На рис.6 приведено изображение оптимальной вертикали, соответствующей начальному моменту времени.

При равносильном определении оптимальной вертикали относительно дополнительной координатной системы, в определении 2.2.1, очевидно, координатную плоскость $X_{11} \times t_{11}$ следует заменить координатной плоскостью $x \times t$ дополнительной координатной системы, и воспользоваться тем, что точка $Q_{11}(\tau)$ имеет декартовые координаты $(c_{11}(t_0), 0, \tau)$ (см. примечание 8).

Определение 2.2.2. *Плоскость, проходящую через две различные оптимальные вертикали $Op(\tau_1)$ и $Op(\tau_2)$, $\tau_1 \neq \tau_2$, будем называть оптимальной плоскостью, и обозначать символом $Op(T)$.*

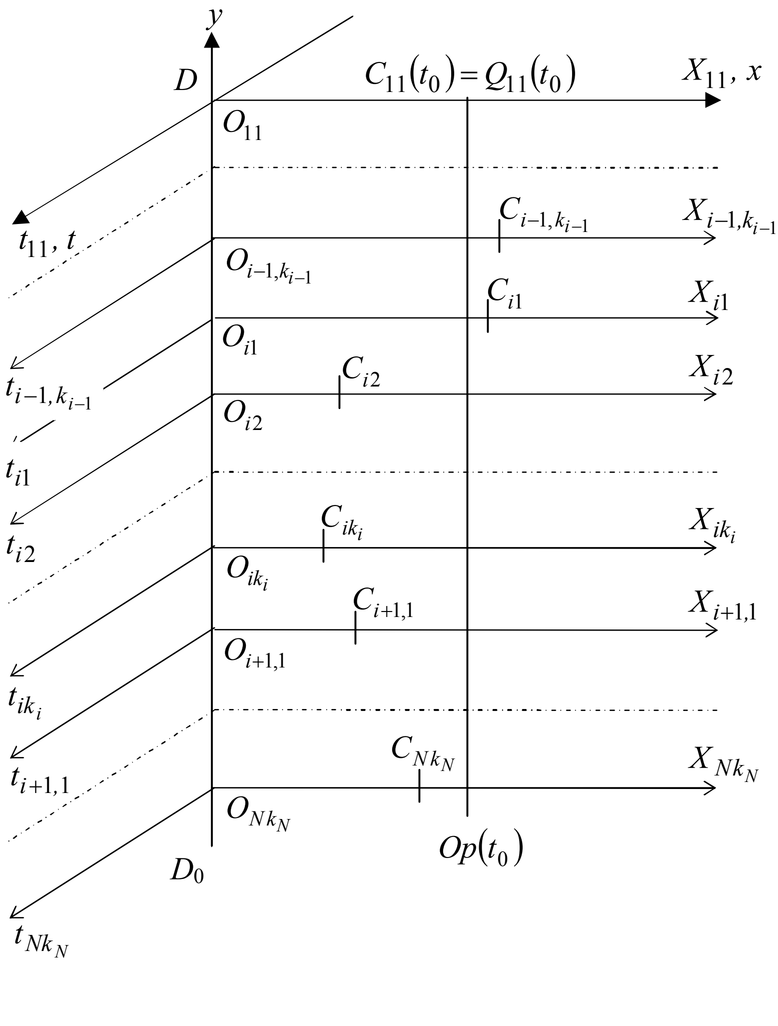


Рис. 6. Изображение оптимальной вертикали $Op(t_0)$.

Оптимальная плоскость параллельна плоскости времени и расстояние между ними, очевидно, равно $c_{11}(t_0)$.

Поэтому для построения оптимальной плоскости $Op(T)$, достаточно провести плоскость параллельную плоскости времени, пересекающую координатную ось X_{11} (или ось x) в точке с адаптивными координатами $(c_{11}(t_0), t_0)_{11}$ или, то же самое декартовыми координатами $(c_{11}(t_0), 0, t_0)$.

Очевидно, что оптимальную плоскость легко можно определить относительно дополнительной координатной системы. Очень важно, что оптимальную плоскость можно построить заранее, т.е. до начала осуществления каких-либо преобразований в адаптивной координатной системе.

Из определений 2.2.1 и 2.2.2 очевидным образом вытекает, что все оптимальные вертикали $Op(\tau)$ $\forall \tau \in T$, расположены на оптимальной плоскости $Op(T)$. Поэтому, выражаясь образно, можно сказать, что оптимальная плоскость по ходу времени «очерчивается» оптимальными вертикалями.

Предполагаем, что дополнительная координатная система по ходу времени остается неподвижной, т.е. не реагирует на всевозможные движения осей адаптивной координатной системы. Принимаем также, что оптимальная плоскость $Op(T)$ неподвижна относительно дополнительной координатной системы. Позже (в III главе), после определения второй адаптивной координатной системы, статус неподвижного пространственно-

го ориентира перейдет также к I адаптивной координатной системе, после чего мы из его названия уберем термин «адаптивный». В результате I координатная система будет служить только для целей фиксации данных, получаемых непосредственно из датчиков.

Таким образом, после начала реализации предполагаемых преобразований в адаптивной координатной системе, определения 2.2.1 и 2.2.2 останутся в силе, в частности, благодаря неподвижным пространственным ориентирам дополнительной координатной системы.

В следующем разделе мы в качестве примера и формальным образом, т.е. без надлежащего геометрического обоснования, приведем алгебраические записи некоторых базовых формул, на идейной основе которых, собственно и строится геометрическая версия решения проблемы глобального наблюдения.

Примечания:

7. Записью координат в виде (2.2.1), т.е. без употребления чисел y_{ij}, мы хотели еще раз подчеркнуть, что в адаптивной координатной системе конкретные значения расстояний между параллельными координатными плоскостями не имеют принципиального значения.

По этой причине обе записи координат:

$$(q, \tau)_{ij} \text{ и } (q, -y_{ij}, \tau),$$

мы часто будем воспринимать практически как равноценные.

Это позволит нам при возникновении необходимости без всяких обоснований записать в адаптивных координатах алгебраические операции, определенные над обычными декартовыми координатами точек произвольной координатной плоскости:

$$X_{ij} \times t_{ij}.$$

8. В определении 2.2.1 выбор точки $Q_{11}(\tau)$ носит заведомо условный характер, т.е. вообще говоря, вместо нее мы могли бы фиксировать любую другую точку $(c_{ij}(t_0), \tau)_{ij}$, или даже всякую точку $(a, \tau)_{ij}$ с произвольно фиксированной пространственной координатой a. Смысл нашего конкретного выбора точки $Q_{11}(\tau)$ можно объяснить следующими соображениями:

В процессе слежения, в общем случае. начиная с некоторого момента времени, может вовсе исчезнуть потребность в контролировании показаний датчика $1_1(\cdot)$ и соответственно может возникать надобность в исключении координатных осей X_{11} и t_{11} из рассмотрения. Преимущество нашего выбора заключается в том, что именно эти оси по построению дублированы соответствующими координатными осями x и t дополнительной координатной системы. Следовательно, исключение указанных осей адаптивной координатной системы не приводит к потере пространственных ориентиров для точек $Q_{11}(\tau)$, а значит и для оптимальной вертикали.

2.3. ПРИМЕР ФОРМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пространственные координаты граничных и оптимальных точек, в общем случае, могут принимать какие угодно различные вещественные значения при условии соблюдения отношений порядка (1.1.1).

Следующие формальные обратимые (групповые) трехпараметрические преобразования сводят на нет существенные различия в расположениях образов этих точек в пространстве.

Это, как мы увидим, достигается за счет придания преобразованным пространственным адаптивным координатам граничных и оптимальных точек наперед фиксированных постоянных значений.

Рассмотрим случай, когда пространственные адаптивные координаты точек (2.2.2) принимают конечные значения. Пусть λ и μ – произвольные фиксированные положительные вещественные числа, в частности, не исключается случай, когда $\lambda = \mu$.

Ниже, время τ, а также числа λ и μ будем считать параметрами рассматриваемых преобразований.

Определим формальные трехпараметрические преобразования точек координатных плоскостей $X_{ij} \times t_{ij}$ следующими двумя соотношениями:

$$(x'', \tau)_{ij} = (c_{11}(t_0), \tau)_{ij} + \left(\lambda(x - c_{ij}(\tau))/(c_{ij}(\tau) - a_{ij}(\tau)),\ \tau\right)_{ij} \quad (2.3.1)$$

для всех $x \leq c_{ij}(\tau)$, и

$$(x'', \tau)_{ij} = (c_{11}(t_0), \tau)_{ij} + \left(\mu(x - c_{ij}(\tau))/(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)),\ \tau\right)_{ij} \quad (2.3.2)$$

для всех $x \geq c_{ij}(\tau)$, где $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, $\tau \in T$.

В силу отношений порядка (1.1.1) в соотношениях (2.3.1),(2.3.2) случаи деления на нуль исключаются (о других подробностях можно узнать из примечания 9).

Действиями преобразований (2.3.1),(2.3.2) всякая точка $(x, \tau)_{ij} = (x, -y_{ij}, \tau)$ координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ отображается взаимнооднозначным (т.е. невырожденным) образом в точку $(x'', \tau)_{ij} = (x'', -y_{ij}, \tau)$ той же плоскости.

Невырожденность отображений обеспечивается тем ус-

ловием, что на каждой плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ при любых фиксированных значениях $\tau \in T$, $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ обе функциональные зависимости:

$$x'' = x''(x, \tau, \lambda) \text{ и } x'' = x''(x, \tau, \mu),$$

определяемые по пространственным адаптивным координатам (непосредсвенно из самих формул (2.3.1) и (2.3.2)), являются линейными непрерывными и строго монотонно возрастающими функциями по аргументу x на каждой из областей $x < c_{ij}(\tau)$ и $x > c_{ij}(\tau)$.

Кроме того, обе эти функции обладают при равенстве $x = c_{ij}(\tau)$ общим постоянным значением $c_{11}(t_0)$.

Следовательно, вместе эти функции определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $x \in (-\infty, \infty)$ при фиксированных индексах i, j и значениях параметров $\tau \in T$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Обратные преобразования, как нетрудно установить, устанавливаются следующими соотношениями:

$$(x, \tau)_{ij} = (c_{ij}(\tau), \tau)_{ij} + \left(\frac{1}{\lambda}(x'' - c_{11}(t_0))(c_{ij}(\tau) - a_{ij}(\tau)), \tau \right)_{ij} \quad (2.3.3)$$

для всех $x'' \leq c_{11}(t_0)$, и

$$(x, \tau)_{ij} = (c_{ij}(\tau), \tau)_{ij} + \left(\frac{1}{\mu}(x'' - c_{11}(t_0))(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)), \tau \right)_{ij} \quad (2.3.4)$$

для всех $x'' \geq c_{11}(t_0)$.

Откуда, по аналогии с предыдущим, заключаем, что на каждой координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ при любых фик-

сированных значениях $\tau \in T$, $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ пространственные координаты, участвующие в этих преобразованиях определяют обратные зависимости:

$$x = x(x'', \tau, \lambda) \text{ и } x = x(x'', \tau, \mu),$$

которые также являются линейными непрерывными и строго монотонно возрастающими функциями по аргументу x'' в областях $x'' < c_{11}(t_0)$ и $x'' > c_{11}(t_0)$ соответственно, а также, имеют при равенстве $x'' = c_{11}(t_0)$ общее значение $c_{ij}(\tau)$.

Резюмируя заключаем, что действия преобразований (2.3.1) и (2.3.2), не приводят к потерям информации (связанной с датчиками). Иначе говоря, по наблюдаемым координатам образов $(x'', \tau)_{ij}$ мы, в соответствии с формулами (2.3.3) и (2.3.4) сможем восстановить (взаимнооднозначным образом) координаты прообразов $(x, \tau)_{ij}$.

Далее буквенные обозначения точек, преобразованных отображениями (2.3.1),(2.3.2) будем отмечать двумя штрихами. Часто двумя штрихами будем отмечать также пространственные адаптивные координаты этих точек.

Следуя вышесказанному, образы точек из соотношений (2.2.2) обозначим соответственно следующими символами:

$$A''_{ij}(\tau) = \left(a''_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}, \quad B''_{ij}(\tau) = \left(b''_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij},$$

$$C''_{ij}(\tau) = \left(c''_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}, \quad H''_{ij}(\tau) = \left(i''_{j}(\tau), \tau\right)_{ij}. \qquad (2.3.5)$$

При равенстве $x = a_{ij}(\tau)$, соблюдая соответствия по индексам и значениям времени, из (2.3.1) получим:

$$\left(a''_{ij}(\tau),\, \tau\right)_{ij} = \left(c_{11}(t_0) - \lambda,\, \tau\right)_{ij} \quad \forall\, \tau \in T\,. \tag{2.3.6}$$

где $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Аналогично, при равенстве $x = b_{ij}(\tau)$, соблюдая соответствия по индексам и значениям времени, из формулы (2.3.2) имеем

$$\left(b''_{ij}(\tau),\, \tau\right)_{ij} = \left(c_{11}(t_0) + \mu,\, \tau\right)_{ij} \quad \forall\, \tau \in T\,. \tag{2.3.7}$$

где $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Далее, вновь учитывая соответствия по индексам и значениям времени, и полагая $x = c_{ij}(\tau)$ в любом из соотношений (2.3.1) или (2.3.2), получим

$$\left(c''_{ij}(\tau),\, \tau\right)_{ij} = \left(c_{11}(t_0),\, \tau\right)_{ij}, \tag{2.3.8}$$

откуда, для пространственных адаптивных координат точек $C''_{ij}(\tau)$, вытекают следующие тождества:

$$c''_{ij}(\tau) = c_{11}(t_0) \quad \forall\, \tau \in T\,. \tag{2.3.9}$$

где $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Соотношения (2.3.6)-(2.3.8) выявляют весьма важную особенность преобразований (2.3.1) и (2.3.2), состоящую в том, что в каждый фиксированный момент времени τ все преобразованные точки $A''_{ij}(\tau)$, $B''_{ij}(\tau)$ и $C''_{ij}(\tau)$ оказываются соответственно на трех параллельных прямых, расположенных на одной плоскости, параллельной несущей плоскости. Эти прямые параллельны также к исходной вертикальной линии DD_0. В самом деле, вне зависимости от значений индексов, в силу формул (2.3.8) и обозначений

точек $Q_{ij}(\tau)$ (из раздела 2.2), справедливы тождества

$$\left(c''_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij} = Q_{ij}(\tau) \;\; \forall \tau \in T,$$

означающие, согласно определению 2.2.1, что все точки $C''_{ij}(\tau)$, являющиеся образами оптимальных точек $C_{ij}(\tau)$ при преобразованиях (2.3.1) и (2.3.2), располагаются на τ – оптимальной вертикали $Op(\tau)$ оптимальной плоскости. Все точки $A''_{ij}(\tau)$, в соответствии с (2.3.6) попадают на вертикаль, параллельной оптимальной вертикали $Op(\tau)$ и проходящей слева от нее на расстоянии λ . Точно также, все точки $B''_{ij}(\tau)$, согласно (2.3.7), оказываются на вертикали, параллельной оптимальной вертикали $Op(\tau)$ и проходящей справа от нее на расстоянии μ .

Таким образом, в каждый момент времени τ действием преобразований (2.3.1),(2.3.2) точки $A_{ij}(\tau)$, $C_{ij}(\tau)$ и $B_{ij}(\tau)$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,k_i}$, которые могут иметь любые пространственные координаты $a_{ij}(\tau)$, $c_{ij}(\tau)$ и $b_{ij}(\tau)$ (удовлетворяющие только отношениям порядка (1.1.1)), отображаются в точки, пространственные координаты которых удается описать соответственно всего тремя постоянными численными значениями:

$$c_{11}(t_0) - \lambda, \; c_{11}(t_0), \; c_{11}(t_0) + \mu .$$

Это результат, имеет исключительно большое значение для описываемого геометрического решения проблемы слежения, и позволить нам упростить процесс слежения, правда, только после преоделения тех препятствий, о кото-

рых речь пойдет ниже, в заключительной части этого раздела.

Введем следующее определение.

Определение 2.3.1. *Каждые две точки, имеющие одинаковые временные координаты и находящиеся на одной координатной плоскости адаптивной координатной системы назовем попарно сравнимыми или, в случаях, когда недоразумения исключены, более коротко: – сравнимыми.*

Очевидно, что любые две попарно сравнимые точки всегда находятся на одной прямой линии, параллельной несущей плоскости, и расположенной на некоторой координатной плоскости адаптивной координатной системы. Каждая из таких прямых линий может быть интерпретирована как обыкновенная вещественная ось, причем ориентированная точно также как и любая из не временных координатных осей адаптивной координатной системы.

Вследствие этого, для попарно сравнимых точек отношения порядка, существующие между соответствующими пространственными адаптивными координатами, определяют естественным образом отношения упорядоченности между этими же точками (точно такие, какие обычно принято вводит для точек вещественной оси). В результате, для попарно сравнимых точек понятия левого и правого приобретают смысл даже в том случае, если бы мы, как это было сделано выше, не воспользовались бы оптимальной вертикалью как пространственным ориентиром.

В силу положительности значений параметров λ и μ, из формул (2.3.6) и (2.3.7) получим следующие отшения

порядка:

$$a''_{ij}(\tau) < c_{11}(t_0) < b''_{ij}(\tau) \quad \forall \tau \in T\,,\ i = \overline{1, N}\,,\ j = \overline{1, k_i}\,, \quad (2.3.10)$$

доказывающие, с учетом тождеств (2.3.9), что отношения порядка (1.1.1) являются инвариантами преобразований (2.3.1) и (2.3.2).

Более того, из строго монотонного возрастания функций $x'' = x''(x, \tau, \lambda)$ и $x'' = x''(x, \tau, \mu)$ (по аргументу x) сразу вытекает, что при действии этих преобразований подобное свойство инвариантности сохранится для всех попарно сравнимых точек. В частности, сравнимые точки $A''_{ij}(\tau)$ и $B''_{ij}(\tau)$, расположенные соответственно по левую и правую сторону от оптимальной плоскости $Op(T)$, всегда будут выполнять функции граничных точек.

Далее, из конечности, строго монотонного возрастания и непрерывности функций $x'' = x''(x, \tau, \lambda)$ и $x'' = x''(x, \tau, \mu)$ (по аргументу x) следует, что вне зависимости от конкретных значений индексов и времени, всевозможные точки $(x, \tau)_{ij} \in X_{ij} \times t_{ij}$, удовлетворяющие условию:

$$x \in I_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau)),$$

имеют при преобразованиях (2.3.1),(2.3.2) образы $(x'', \tau)_{ij}$, пространственные адаптивные координаты которых без пропусков заполняют интервал:

$$x'' \in (c_{11}(t_0) - \lambda,\ c_{11}(t_0) + \mu).$$

Используя обозначение «$\Leftrightarrow$» для двусторонней импликации, для точек интервалов $I_{ij}(\tau)$ – допустимых значений датчиков, действия преобразований (2.3.1)-(2.3.4) можно ус-

ловно изображать следующей диаграммой:

$$I_{ij}(\tau)=\left(a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau)\right)\Leftrightarrow\left(c_{11}(t_0)-\lambda, c_{11}(t_0)+\mu\right), \quad (2.3.11)$$

где $\tau\in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

Полученные выше формулы, быть может, на первый взгляд представляются безупречными. Но это не совсем так. Причина того, что при выводе формул (2.3.6) и (2.3.7), мы не сталкивались с противоречиями, является то, что каждую из этих формул мы анализировали раздельно, т.е. действовали исходя либо из формул преобразований (2.3.1), либо же из (2.3.2).

При одновременном же действии преобразований (2.3.1) и (2.3.2) ситуация меняется: – Попытка дать геометрическую интерпретацию одновременным действиям этих преобразований, в общем случае, наталкивается на трудности, связанные с появлением неопределенности в геометрической конфигурации поверхности времени в пространстве (подробнее об этом см. примечание 10).

Собственно из-за наличия такой неопределенности, преобразования (2.3.1)-(2.3.4) выше были названы формальными.

Примечания:

9. Условие конечности значений пространственных координат точек (2.2.2) существенно для осуществления преобразований (2.3.1) и (2.3.2). Так, преобразование (2.3.1) не имеет смысла в случае, когда $a_{i_1 j_1}(\tau_1)=-\infty$ при некоторых значениях индексов i_1, j_1 и времени τ_1. Аналогично, второе преобразование (2.3.2) не проводится, если $b_{i_2 j_2}(\tau_2)=\infty$ при некоторых значениях индексов i_2, j_2 и времени τ_2.

Однако, в случаях бесконечности значений первых координат точек, процесс слежения только упрощается, поскольку соответственно уменьшается общее количество граничных ограничений.

Заметим, что случаи типа $a_{i_1 j_1}(\tau_1) = +\infty$ и $b_{i_2 j_2}(\tau_2) = -\infty$ невозможны по самому определению интервала допустимых значений датчиков $I_{ij}(t) = (a_{ij}(t), b_{ij}(t))$.

10. Понятно, что в каждый момент времени при отдельном действии любого одного из двух преобразований (2.3.1) или (2.3.2) координатные оси I адаптивной координатной системы могут занимать определенные новые положения в пространстве. Эти «передислокации» координатных осей в общем случае могут не совпадать, т.е. могут быть различными для каждого из этих преобразований. Поэтому противоречие может выразиться, например, в виде неопределенности (или неоднозначности) геометрической конфигурации поверхности времени в пространстве, что может иметь место при одновременных действиях преобразований (2.3.1) и (2.3.2).

Таким образом, имеется противоречие, ставящий под сомнение справедливость самой идеи упрощений, вытекающей из формул (2.3.6)-(2.3.11). Более того, противоречие, возникающий при одновременном действии преобразований (2.3.1),(2.3.2), делает невозможным, например, применение способа определения пространственных адаптивных координат, который был описан в разъяснениях к правилу записи (2.2.1).

И это еще не все. Так, при осмыслении действий преобразований (2.3.1),(2.3.2) выявляется, что эти преобразования не являются достаточными, т.е. для их осуществления потребуется проводить определенные дополнительные преобразования для временных координатных осей I адаптивной координатной системы.

В самом деле, из записи формул преобразований (2.3.1),(2.3.2) можно усмотреть, что в начальный момент времени $\tau = t_0$ осуществление преобразований сопровождается, в частности, сдвигами точек координатных осей X_{ij}, по своим величинам равным точно таким же сдвигам соответствующих начальных точек этих осей.

Эти сдвиги, в целях сохранения свойства «прямоугольности» декартовых координатных систем, должны вызывать согласованные с ними дополнительные параллельные переносы координатных осей времени. Неопределенность пространственного местоположения, например, осей времени в общем случае делает невозможным определения надлежащих преобразований параллельного переноса для осей времени I адаптивной координатной системы.

Однако пространственное положение поверхности времени становится определенным, например, в случае, когда изначально при любых значений индексов оказываются справедливыми тождества:

$$c_{ij}(\tau) \equiv 0 \quad \forall \tau \in T .$$

Данный случай, конечно, для нас не приемлем, так как приведенные тождества заметно ограничивают общность постановки проблемы. Тем не менее, этот случай интересен тем, что именно здесь высвечивается путь, ведущий к устранению отмеченного противоречия, и, как это мы увидим в III главе, посредством определения новой адаптивной координатной системы.

Наконец, отметим, что ввод каких-либо дополнительных преобразований обычно сопровождается увеличением общего объема вычислений. В рассматриваемом же случае этого не происходит, поскольку в предлагаемой версии решения проблемы глобального наблюдения не требуется проводить какие-либо вычисления, связанные с реализацией упомянутых выше дополнительных преобразований.

Дополнительные преобразования, связанные с переносом осей времени, нужны будут, прежде всего, для геометрически четкого обоснования законности упрощающей идеи, описанной с помощью формул (2.3.6)-(2.3.11).

ГЛАВА III. НОВЫЕ КООРДИНАТНЫЕ СИСТЕМЫ

Справедливость упрощающей процесс наблюдения идеи, нарушающейся при действии формальных преобразований, доказана в настоящей – третьей главе.

В разделе 3.1 определены так называемые движения выравнивания, при которых, с одной стороны, точки координатных плоскостей адаптивной координатной системы подвергаются таким сдвигам, что, в итоге, все оптимальные точки отображаются на оптимальную плоскость. С другой стороны, адаптивные координаты точек при этих сдвигах, выполняемых относительно дополнительной координатной системы, остаются неизменными. Тем самым, резервируется возможность для проведения некоторых новых преобразований, не меняющих достигнутые движениями выравнивания местоположения оптимальных точек.

В разделе 3.2 рассматривается пример движений выравнивания в I адаптивной координатной системе. Здесь продемонстрированы возможности адаптивной координатной системы, позволяющие нам дифференцированным образом применять к координатным осям и плоскостям различные преобразования. Раздел 3.2, по замыслу, должен облегчить изучение новой II адаптивной координатной системы, введенной в разделе 3.3.

Здесь предполагается, что I адаптивная координатная система не участвует более в каких-либо преобразованиях координат, и постоянно находится в исходном неподвижном положении. Исходя из этого, далее I адаптивная координатная система называется сокращенно I координатной системой. После этого I координатная система используется в качестве неподвижного пространственного ориентира. Основное отличие II адаптивной координатной системы от первой состоит в том,

что здесь любая оптимальная точка по определению должна располагаться на некоторой координатной оси времени. Поэтому, в общем случае, каждая ось времени новой координатной системы во всякий момент времени может занять в пространстве новое местоположение, определяемое соответствующими положениями оптимальных точек относительно I координатной системы. Это, в общем случае, придает подвижность конструкции II адаптивной координатной системы, причем без применения каких-либо преобразований.

В разделе 3.4 реализованы движения выравнивания во II адаптивной координатной системе. В результате, все оптимальные точки, изначально и по определению находящиеся на временных координатных осях исходной II адаптивной координатной системы, действиями преобразований взаимнооднозначным образом отображаются (вместе с осями времени) на оптимальную плоскость. В связи с этим, в дальнейшем эта плоскость называется оптимальной плоскостью времени.

В разделе 3.5 исследуется еще одна новая адаптивная координатная система, которая формируется в пространстве естественным образом, в результате действий движений выравнивания во II адаптивной координатной системе. Ее мы назвали преобразованной (второй) адаптивной координатной системой. В этой координатной системе все оси времени расположены на оптимальной плоскости времени. Оставаясь по ходу времени неподвижными, оси времени содержат все преобразованные движениями выравнивания оптимальные точки. В итоге, все оптимальные точки имеют одинаковые нулевые пространственные координаты относительно этой координатной системы. Иначе говоря, независимо от значений времени, пространственные координаты всех преобразованных оптимальных точек описываются одним числом.

Преобразованная адаптивная координатная система позволяет нам приступить к непротиворечивому описанию одновременно действующих двух преобразований растяжения-сжатия (соответственно на каждой координатной полуплоскости), которые вместе с преобразованиями движений выравнивания образуют композиции преобразований, являющиеся гомеоморфизмами. При этом оси времени выбираются геометрическими местами центров преобразований растяжения-сжатия.

В разделе 3.6, устанавливается, что после действия композиций преобразований, в общем случае произвольно различающиеся пространственные координаты буквально всех граничных и оптимальных точек удается корректно описать всего тремя численными значениями, неменяющимися в течение всего времени наблюдения. Таким образом, строго обосновывается справедливость упрощающей процесс наблюдения идеи, нарушающейся при совместных действиях формальных преобразований из II главы.

Интересно, что при этом сохраняется гомеоморфизм и, что крайне важно, отношения порядка между пространственными координатами произвольных двух попарно сравнимых точек оказываются инвариантами композиций преобразований.

Использованные здесь формулы перехода позволяют в процессе слежения вместо непростой процедуры, предполагающей вначале построения II адаптивной координатной системы, реализовать практичную и очень простую схему, в которой можно довольствоваться лишь предположением существования этой несколько сложной по строению координатной системы.

3.1. ДВИЖЕНИЯ ВЫРАВНИВАНИЯ

Цель проводимых ниже преобразований сдвига точек координатных плоскостей $X_{ij} \times t_{ij}$, координатных осей X_{ij} и параллельного переноса осей времени t_{ij} первой адаптивной координатной системы состоит в том, что в каждый момент времени $\tau \in T$ образы оптимальных точек $C_{ij}(\tau) = \left(c_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}$, в количестве n, выравнивались по одной заданной прямой линии. Конкретно говоря, необходимо чтобы в произвольный момент времени τ образы оптимальных точек при реализовываемых преобразованиях попадали исключительно на оптимальную вертикаль $Op(\tau)$, и, следовательно, на оптимальную плоскость $Op(T)$.

Движения координатных осей и координатных плоскостей адаптивной координатной системы, приводящие к достижению указанной цели, назовем *движениями выравнивания*.

Движения выравнивания можно представить следующим наглядным образом:

Координатные плоскости адаптивной координатной системы мысленно представим в виде параллельных «полок» некоторой книжной этажерки и вообразим, что каждая полка имеет по одной метке. Очевидно, что наша цель достигается путем надлежащих сдвигов полок, приводящих к выстраиванию этих меток по одной вертикальной линии.

В случае непостоянства оптимальных значений датчиков, положения меток и соответствующие им сдвиги зависят от времени, и мы, по идее, неминуемо должны уви-

деть на дисплее изображение «танцующей» этажерки.

Однако предпринимаемые позже действия, как было обещано во введении, позволяют избавить наблюдателя от отвлекающего вида движущейся адаптивной координатной системы, и даже освободить компьютер от ряда вычислений, необходимых для определения графических параметров этих движений.

Следует отметить, что в частном случае, когда по условиям наблюдения численные значения пространственных координат всех оптимальных точек $C_{ij}(\tau)=\left(c_{ij}(\tau),\tau\right)_{ij}$ одинаковы, и тождественно равны некоторой постоянной величине: $c_{ij}(\tau)\equiv c$, то движения выравнивания становятся излишними.

В этом случае, сначала, оптимальную плоскость следует провести ортогонально к несущей плоскости через точки с координатами $\left(c,\,-y_{ij},\,t_0\right)$, и затем осуществить соответствующие процедуры (которые позже, в этой же главе, детально описаны для общего случая), наделяющие эту плоскость статусом новой координатной плоскости времени.

Наконец, относительно полученной таким образом новой адаптивной координатной системы, нужно осуществить упрощающие (по своим действиям) преобразования растяжения-сжатия. Эти преобразования будут аналогичны преобразованиям, рассмотренным позже в разделе 3.6.

Мы увидим, что значения временных координат точек на координатных плоскостях окажутся инвариантами всевозможных движений выравнивания, поскольку эти дви-

жения будут происходить в направлениях, ортогональных к плоскости времени (или к осям времени).

Кроме того, движения осей времени однозначно будут устанавливаться по движениям выравнивания координатных осей X_{ij}, поэтому резонно, сначала определить преобразования сдвига для пространственных адаптивных координат.

Для определения движений выравнивания в рассматриваемом пространстве R_3 имеются три подходящих неподвижных ориентира.

Первым ориентиром по условию являются координатные оси дополнительной декартовой координатной системы, вторым – оптимальная плоскость $Op(T)$ (имеющее геометрически фиксированное расположение относительного первого ориентира) и, наконец, третьим – координатная ось X_{11} в начальный момент времени (см. примечание 11).

Следующей раздел, с одной стороны, носит демонстрационный характер, а с другой стороны, облегчает восприятие новой адаптивной координатной системы, имеющей несколько сложное строение. В разделе рассматривается пример движений выравнивания в I адаптивной координатной системе. Здесь мы, в частности, попытались подробнее показать возможности адаптивной координатной системы, позволяющие нам по ходу времени дифференцированным образом применять к координатным осям и плоскостям различные преобразования группового типа.

Нужные же для нас движения выравнивания в новой адаптивной координатной системе, необходимость введения которой станет более ясной к концу раздела 3.2, мы определим позже, в разделе 3.4.

Примечание 11:

Действительно, согласно определению 2.2.1, в общем случае ось X_{11} оказывается единственной среди всех координатных осей адаптивной координатной системы на несущей плоскости, которая в начальный момент времени $\tau = t_0$ не нуждается в выравнивании, т.е. остается неподвижной (этот факт повторно встречается в разделе 3.2).

Выше, мы уже отметили, что после определения новой адаптивной координатной системы, I координатная система всегда будет находиться в исходном неподвижном положении. В результате, она «лишится» свойства адаптивности и, тем самым, сама превратиться в главный неподвижный ориентир пространства.

3.2. ПРИМЕР ДВИЖЕНИЙ ВЫРАВНИВАНИЯ В I АДАПТИВНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Дополнительная координатная система (первый ориентир) позволяет описать рассматриваемый ниже пример движений выравнивания в привычных декартовых координатах, поэтому мы ею и воспользуемся.

Ниже, время τ является параметром преобразований.

Прежде чем описать движения выравнивания координатных осей, определим относительно I ориентира соответствующие движения каждой точки координатной пло-

скости $X_{ij} \times t_{ij}$, следующими преобразованиями сдвига:

$$\left(x', -y_{ij}, \tau\right) = \left(x, -y_{ij}, \tau\right) + \left(\Delta_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau\right), \qquad (3.2.1)$$

где $\left(x, -y_{ij}, \tau\right)$ – произвольная точка на координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, которая взаимнооднозначным образом отображается в точку $\left(x', -y_{ij}, \tau\right)$ на той же плоскости,

$$\Delta_{ij}(\tau) = c_{11}(t_0) - c_{ij}(\tau) \;\; \forall \tau \in T, \; i = \overline{1, N}, \; j = \overline{1, k_i}. \quad (3.2.2)$$

Так как в общем случае величина сдвига (3.2.2) – не постоянная, то, как это видно из соотношений (3.2.1), переменная x' может зависеть от времени даже тогда, когда величина x является постоянной, т.е. в общем случае имеет место зависимость $x' = x'(\tau)$.

Соблюдая соответствия по индексам и времени, в соотношениях (3.2.1) положим $x = c_{ij}(\tau)$, и убедимся в том, что оптимальная точка $C_{ij}(\tau)$ на плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, имеющая координаты $\left(c_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau\right)$ в дополнительной координатной системе, после действия преобразований в момент времени τ перейдет в точку $C'_{ij}(\tau)$ с координатами:

$$\left(c'_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau\right) = \left(c_{11}(t_0), -y_{ij}, \tau\right) \;\; \forall \tau \in T.$$

Правая сторона этого равенства совпадает с фиксированными (относительно дополнительной координатной системы) координатами точки пересечения τ – оптимальной вертикали с координатной плоскостью $X_{ij} \times t_{ij}$:

$$Q_{ij}(\tau) = \left(c_{11}(t_0), \tau\right)_{ij}.$$

Поэтому

$$C'_{ij}(\tau)=Q_{ij}(\tau)=\left(c_{11}(t_0), -y_{ij}, \tau\right) \ \forall \tau \in T . \quad (3.2.3)$$

Согласно (3.2.3) и определению 2.2.1, в результате действия преобразований (3.2.1), в каждый момент времени τ преобразованные оптимальные точки:

$$C'_{ij}(\tau),\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k_i},$$

будут находиться на τ - оптимальной вертикали (см. примечание 12).

Преобразованиями типа (3.2.1) можно определить движения выравнивания $X_{ij} \to X'_{ij}(\tau)$ для каждой точки координатной оси X_{ij} первой адаптивной координатной системы:

$$\left(x', -y_{ij}, t_0\right)=\left(x, -y_{ij}, t_0\right)+\left(\Delta_{ij}(\tau), -y_{ij}, t_0\right) \ \forall \tau \in T . \ (3.2.4)$$

Следует обратить внимание на то, что в общем случае формулы сдвига (3.2.4), несмотря на некоторые сходства, не являются элементарными следствиями формул (3.2.1), т.е. они не могут быть выведены из формул (3.2.1) простой подстановкой $\tau = t_0$. Это связано с неравноправным использованием в записях $\left(x'(\tau), -y_{ij}, \tau\right)$ или $\left(x'(\tau), \tau\right)_{ij}$ обозначения переменной времени. Запись $x'(\tau)$ означает, что пространственная координата является значением функции $x' = x'(\cdot)$ на момент времени τ, между тем отдельно использованный в скобках символ τ, согласно правилу записи (2.2.1), указывает на то, что точка $\left(x'(\tau), \tau\right)_{ij}$ расположена на удалении $\tau - t_0$ от несущей плоскости.

Такая ситуация возникает, в основном, в связи с необходимостью обеспечения ортогональности осей времени к несущей плоскости при осуществлении преобразований осей времени.

Преобразования (3.2.4) однозначно определяют сдвиги начальных точек $O_{ij} = (0, t_0)_{ij} = (0, -y_{ij}, t_0)$, соответствующих координатных осей X_{ij} в начальный момент времени. Действительно, учитывая в (3.2.4) зависимость $x' = x'(\tau)$ и полагая $x = 0$, $\tau = t_0$, мы получим

$$(0'(t_0), -y_{ij}, t_0) = (\Delta_{ij}(t_0), -y_{ij}, t_0). \qquad (3.2.5)$$

Откуда, согласно условию $\Delta_{11}(t_0) = 0$, имеем равенства

$$O'_{11} = (0'(t_0), 0, t_0) = (0, 0, t_0) = (0, t_0)_{11} = O_{11},$$

подтверждающие то, что геометрическое местоположение оси X_{11} в начальный момент времени никак не меняется.

Аналогично (3.2.5), для точек

$$\theta_{ij}(\tau) = (0, \tau)_{ij} = (0, -y_{ij}, \tau),$$

расположенных на пересечении плоскости времени и плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$, полагая в (3.2.1) $x' = x'(\tau)$ и $x = 0$, получим

$$(0'(\tau), -y_{ij}, \tau) = (0, -y_{ij}, t_0) + (\Delta_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau) \quad \forall \tau \in T. \qquad (3.2.6)$$

Для того чтобы значения временных координат точек были инвариантами движений выравнивания, необходимо выполнение следующих двух условий:

1) Движение каждой точки должно происходить по прямым линиям, параллельным несущей плоскости;

2) Эти движения не должны нарушать декартовую структуру каждой двумерной координатной системы в I адаптивной координатной системе.

Первое условие обеспечивается соотношениями (3.2.1)-(3.2.6). Второго же условия добиться несложно, если мы примем, что движения осей времени происходят согласованно с движениями выравнивания (3.2.4).

Здесь согласованность преобразований (3.2.4) и преобразований параллельного переноса осей времени

$$t_{ij} \to t'_{ij}(\tau), \tag{3.2.7}$$

означает, что на каждой координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ величина и направление параллельного переноса оси времени t_{ij} совпадает с величиной и направлением сдвига (3.2.6) точек $\theta_{ij}(\tau)$.

При этом очевидно, не допускаются какие-либо деформации, искривления, разрывы или изменения ориентаций координатных осей и, как следствие, отношения ортогональности $X_{ij} \perp t_{ij}$ инвариантны относительно действий преобразований (3.2.7):

$$X'_{ij}(\tau) \perp t'_{ij}(\tau) \quad \forall \tau \in T .$$

Иначе говоря, при движениях выравнивания координатные оси X_{ij} и t_{ij} первой адаптивной координатной системы двигаются вместе с плоскостью $X_{ij} \times t_{ij}$ как единое целое, полностью сохраняя структуру прямоугольной декартовой системы на этой плоскости.

С учетом этого и принимая во внимание равенства

(3.2.5),(3.2.6), определим сдвиги начальных точек O_{ij} для каждого момента времени $\tau \in T$ следующим образом:

$$\left(0'(\tau), -y_{ij}, t_0\right) = \left(0, -y_{ij}, t_0\right) + \left(\Delta_{ij}(\tau), -y_{ij}, t_0\right) \ \forall \tau \in T. \quad (3.2.8)$$

В общем случае, действия преобразований (3.2.7), (3.2.8) меняют геометрические местоположения осей времени в пространстве. При этом остаются неизменными значения всех временных координат точек.

На рис.7 видно, что все преобразованные оптимальные точки $C'_{ij}(t_0)$ расположены на оптимальной вертикали $Op(t_0)$, и соответственно плоскость времени преобразована в поверхность времени.

Преобразования (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) определены для каждого момента времени $\tau \in T$, поэтому в результате их действия все преобразованные оптимальные точки $C'_{ij}(\tau)$ оказываются на оптимальной вертикали $Op(\tau)$, а, следовательно, и на оптимальной плоскости $Op(T)$.

Таким образом, преобразования (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) полностью определяют движения выравнивания в I адаптивной координатной системе.

Соблюдая соответствия по индексам и времени, отнимем обе стороны равенств (3.2.6) от соответствующих сторон равенств (3.2.1):

$$\left(x' - 0'(\tau), -y_{ij}, \tau\right) = \left(x - 0, -y_{ij}, \tau\right) \ \forall \tau \in T. \quad (3.2.9)$$

Аналогично, отнимая обе стороны равенств (3.2.8) от соответствующих сторон равенств (3.2.4) при одинаковых

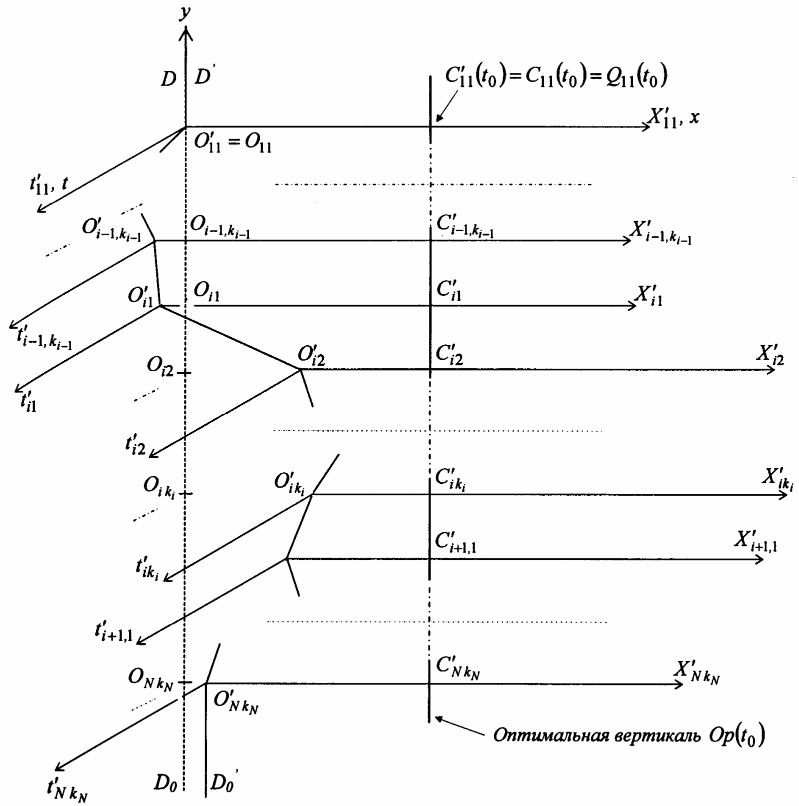


Рис. 7. Возможные пространственные местоположения осей I адаптивной координатной системы относительно дополнительной координатной системы после действия преобразований (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) в начальный момент времени $\tau = t_0$.

Прямая линия DD_0, проходящая через точки $O_{11},\ldots,O_{i-1,k_{i-1}},O_{i1}$, $O_{i2},\ldots,O_{Nk_N}$, преобразована в ломаную линию с вершинами в точках $O'_{11},\ldots,O'_{i-1,k_{i-1}}$, O'_{i1},O'_{i2}, $\ldots,O'_{Nk_N}$.

значениях индексов и времени, получим

$$\left(x'-0'(\tau), -y_{ij}, t_0\right)=\left(x-0, -y_{ij}, t_0\right) \quad \forall \tau \in T . \quad (3.2.10)$$

Равенства (3.2.9) и (3.2.10), вместе с вышесказанным о временных координатах, доказывают, что при движениях выравнивания неизменными остаются адаптивные координаты всех точек координатных плоскостей $X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)$ $\forall \tau \in T$, определенные относительно движущейся I адаптивной координатной системы. Однако относительно дополнительной координатной системы, в общем случае свойство инвариантности координат сохраняется только для временных координат.

Продемонстрируем сказанное на примере пространственных координат важных для нас точек (2.2.2). Но, сначала, введем следующее правило для обозначений:

Буквенные обозначения точек координатных плоскостей $X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)$ будем отмечать одним штрихом. Иногда, одним штрихом будем отмечать также пространственные адаптивные координаты этих точек.

Согласно этому правилу, после действия преобразований (3.2.1) (для координатных плоскостей) и преобразований (3.2.4),(3.2.7) (для координатных осей) точки (2.2.2) координатных плоскостей $X_{ij}\times t_{ij}$ перейдут в точки координатных плоскостей $X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)$ и будут иметь следующие обозначения:

$$A'_{ij}(\tau)=\left(a'_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}, \ B'_{ij}(\tau)=\left(b'_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij},$$
$$C'_{ij}(\tau)=\left(c'_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}, \ H'_{ij}(\tau)=\left(i'_{j}(\tau), \tau\right)_{ij}. \quad (3.2.11)$$

В силу соотношений (3.2.9) и (3.2.10) в произвольный момент времени $\tau \in T$ на каждой плоскости $X'_{ij}(\tau) \times t'_{ij}(\tau)$ между пространственными координатами точек (3.2.11), определенных относительно подвижной I адаптивной координатной системы, и пространственными координатами точек (2.2.2), имеются следующие связующие соотношения:

$$a'_{ij}(\tau) - 0'(\tau) = a_{ij}(\tau) - 0, \; b'_{ij}(\tau) - 0'(\tau) = b_{ij}(\tau) - 0,$$
$$c'_{ij}(\tau) - 0'(\tau) = c_{ij}(\tau) - 0, \;\; i'_j(\tau) - 0'(\tau) = i_j(\tau) - 0,$$

где нули в правых частях равенств являются пространственными координатами точек $\theta_{ij}(\tau) = (0, \tau)_{ij}$, а в левых – пространственными координатами преобразованных точек:

$$\theta'_{ij}(\tau) = (0'(\tau), \tau)_{ij}, \; i = \overline{1, N}, \; j = \overline{1, k_i}.$$

Таким образом, на примере преобразований точек (2.2.2), мы видим, что при движениях I адаптивной координатной системы адаптивные координаты этих точек, остаются неизменными.

Однако относительно дополнительной координатной системы это уже не так (в этом случае неизменными остаются временные координаты точек (2.2.2)).

Действительно, из (3.2.1) следуют выражения:

$$a'_{ij}(\tau) = a_{ij}(\tau) + \Delta_{ij}(\tau), \; b'_{ij}(\tau) = b_{ij}(\tau) + \Delta_{ij}(\tau),$$
$$c'_{ij}(\tau) = c_{11}(t_0), \; i'_j(\tau) = i(\tau) + \Delta_{ij}(\tau), \qquad (3.2.12)$$

подтверждающие сказанное для пространственных координат точек (3.2.11), определенных относительно дополнительной координатной системы.

Для каждого фиксированного момента времени $\tau \in T$, соблюдая соответствия по индексам, добавим в каждую из сторон неравенств (1.1.1) одну и ту же величину $\Delta_{ij}(\tau)$, и учитывая (3.2.12) получим следующие неравенства

$$a'_{ij}(\tau) = a_{ij}(\tau) + \Delta_{ij}(\tau) < c'_{ij}(\tau) = c_{ij}(\tau) + \Delta_{ij}(\tau) =$$
$$= c_{11}(t_0) < b_{ij}(\tau) + \Delta_{ij}(\tau) = b'_{ij}(\tau) \ \forall \tau \in T$$

означающие, что отношения порядка (1.1.1) являются инвариантами преобразований (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7).

Это вытекает также из общего свойства, состоящего в том, что при параллельном сдвиге, действующем на упорядоченном множестве (каковым и является каждое множество попарно сравнимых точек), так отношения упорядоченности, как и соответствующие им отношения порядка между пространственными координатами попарно сравнимых точек, не нарушаются.

Аналогичное свойство инвариантности присуще к каждому непустому подмножеству попарно сравнимых точек.

Следовательно, при преобразованиях (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) граничные точки $A_{ij}(\tau)$ и $B_{ij}(\tau)$ на координатных плоскостях $X_{ij} \times t_{ij}$, будучи сравнимыми, преобразуются в соответствующие граничные точки $A'_{ij}(\tau)$ и $B'_{ij}(\tau)$ (на координатных плоскостях $X'_{ij}(\tau) \times t'_{ij}(\tau)$) и, причем, точки $A'_{ij}(\tau)$ и $B'_{ij}(\tau)$ будут находиться соответственно по левую и правую сторону оптимальной плоскости $Op(T)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, $\tau \in T$.

Очевидно также, что при любом значении времени $\tau \in T$ точки $(x, \tau)_{ij} \in X_{ij} \times t_{ij}$ $\forall x \in I_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau))$ при преобразованиях сдвига и переноса (3.2.1),(3.2.4),(3.2.7) будут иметь образы:

$$(x', \tau)_{ij} \in X'_{ij}(\tau) \times t'_{ij}(\tau),$$

пространственные координаты которых без пропусков заполнят интервал $x' \in (a'_{ij}(\tau), b'_{ij}(\tau))$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Введем следующее определение.

Определение 3.2.1. *Для каждых фиксированных индексов i и j, линию пересечения оптимальной плоскости $Op(T)$ с координатными плоскостями $X_{ij} \times t_{ij}$ будем называть ij - оптимальной горизонталью,* $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Согласно определениям 2.2.2 и 3.2.1, уравнение каждой ij - оптимальной горизонтали на координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ в координатах дополнительной координатной системы имеет вид:

$$(x, -y_{ij}, \tau) = (c_{11}(t_0), -y_{ij}, \tau) \quad \tau \in T. \tag{3.2.13}$$

По поводу уравнения (3.2.13) см. примечание 13.

Мы определили преобразования (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) в дополнительной координатной системе, и увидели, что преобразуемые точки, содержащиеся на какой-либо координатной плоскости, и сама эта плоскость при движениях выравнивания двигаются как единое целое.

Соответственно в каждый фиксированный момент времени действиями преобразований (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7) в

пространстве R_3 устанавливается единственная геометрическая конфигурация для поверхности времени.

Однако, в общем случае, в I адаптивной координатной системе не удается добиться эффекта выравнивания для образов граничных точек (по аналогии с образами оптимальных точек), поскольку при этом теряется свойство определенности геометрической конфигурации поверхности времени. И мы вновь сталкиваемся с противоречием, уже описанным в примечании 10.

В следующем разделе мы определим новую адаптивную координатную систему. С ее помощью в последующих разделах дается непротиворечивая геометрическая интерпретация реализации упрощающей идеи, описанной ранее с помощью формальных преобразований (2.3.1)-(2.3.4).

С геометрической точки зрения новая координатная система будет отличаться от первой расположениями осей времени. Соответственно движения выравнивания, которые мы осуществим в новой координатной системе, с точностью до расположений осей времени будут такими же, какими мы их описали выше.

Примечания:

12. Если окажется, что оптимальная точка $C_{ij}(\tau)=(c_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau)$ в момент времени τ_1 находится на оптимальной вертикали $Op(\tau_1)$, т.е. имеет место равенство: $c_{ij}(\tau_1)=c_{11}(t_0)$, – то она останется на ней и после действий преобразований (3.2.1) в момент τ_1, поскольку согласно (3.2.2): $\Delta_{ij}(\tau_1)=0$.

13. Теорема 3.2.1. *Уравнения (3.2.13) являются инвариантами так движений выравнивания (3.2.1),(3.2.4) и (3.2.7), как и соответствующих (по индексам) формальных преобразований (2.3.1) и (2.3.2).*

Доказательство. Используя то, что на множестве пересечений $Op(T)\cap\left(X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)\right)$ значения пространственных координат точек $C'_{ij}(\tau)=\left(c'_{ij}(\tau),\ \tau\right)_{ij}$, в силу (3.2.3), являются постоянными:

$$c'_{ij}(\tau)=c_{11}(t_0)\quad \forall\tau\in T\,,$$

координатные плоскости $X_{ij}\times t_{ij}$ в определении 3.2.1, можно равноценным образом заменять соответствующими (по индексам) координатными плоскостями $X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)\quad \forall\tau\in T$.

После реализации движений выравнивания, каждая ij - оптимальная горизонталь будет состоять из одних преобразованных оптимальных точек $C'_{ij}(\tau)$. Следовательно, на координатных плоскостях $X'_{ij}(\tau)\times t'_{ij}(\tau)\quad \forall\tau\in T$ уравнение каждой ij - оптимальной горизонтали, в координатах дополнительной декартовой координатной системы, примет вид

$$\left(x',\,-y_{ij},\,\tau\right)=\left(c_{11}(t_0),\,-y_{ij},\,\tau\right)\quad \tau\in T\,. \tag{3.2.14}$$

Сравнивая (3.2.13) и (3.2.14), а также, учитывая соотношения (2.3.8) или (2.3.9) убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема доказана.

3.3. ВТОРАЯ АДАПТИВНАЯ КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

Всюду далее предполагается, что I адаптивная координатная система не участвует более в каких-либо преобзованиях координат, и постоянно находится в исходном неподвижном положении. Тем самым, эта координатная система «лишается» свойства адаптивности.

Исходя из этого, далее I адаптивную координатную систему будем называть просто *первой координатной системой,* и использовать конструктивные элементы этой координатной системы в качестве неподвижных пространственных ориентиров, наравне с элементами дополнительной координатной системы.

Все описанные до сих пор преобразования не оказывали влияния на временные координаты точек. Геометрически это означало, что в каждый момент времени τ преобразования осуществлялись на плоскости, параллельной несущей плоскости и удаленной от нее на величину $\tau - t_0$.

Определение 3.3.1. *Плоскость, которая параллельна несущей плоскости и содержит оптимальную вертикаль $Op(\tau)$, назовем τ - несущей плоскостью. Если τ является текущим значением времени, то соответствующую τ - несущую плоскость будем называть текущей τ - несущей плоскостью.*

Теперь, исходную несущую плоскость можем называть также t_0 - *несущей плоскостью*.

В связи с определением 3.3.1 см. примечание 14.

Новую, вторую адаптивную координатную систему мы будем строить на основе геометрической конструкции I координатной системы.

Координатные оси времени и не временные координатные оси на несущей плоскости новой адаптивной координатной системы, соответствующие произвольно выбранному моменту времени $\tau \in (-\infty, \infty)$, обозначим символами $t_{ij}^*(\tau)$ и $X_{ij}^*(\tau)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, соответственно.

Примем, что координатные оси $t_{ij}^{*}(\tau)$ и $X_{ij}^{*}(\tau)$ располагаются на соответствующей (по индексам) координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ первой координатной системы.

Считаем, что так любые пары осей t_{ij} и $t_{ij}^{*}(\tau)$, как и любые пары осей X_{ij} и $X_{ij}^{*}(\tau)$ параллельны между собой и ориентированы одинаково.

Следовательно, в каждый фиксированный момент времени τ на координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ всякая пара осей $t_{ij}^{*}(\tau)$ и $X_{ij}^{*}(\tau)$ будут ортогональными и, естественно, пересекутся в одной точке, которую мы обозначим символом $O_{ij}^{*}(\tau)$.

Координатные плоскости, «образованные» координатными осями $X_{ij}^{*}(\tau)$ и $t_{ij}^{*}(\tau)$ будем обозначать символами:

$$X_{ij}^{*}(\tau) \times t_{ij}^{*}(\tau).$$

Точку $O_{ij}^{*}(\tau)$, после надлежащего определения ее координат, будем считать *началом координат* (или *начальной точкой*) *на координатной плоскости* $X_{ij}^{*}(\tau) \times t_{ij}^{*}(\tau)$, *соответствующей моменту времени* τ .

Примем, что в каждый фиксированный момент времени $\tau \in T$ начальная точка $O_{ij}^{*}(\tau)$ на координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ относительно I координатной системы имеет следующие координаты:

$$O_{ij}^*(\tau)=\left(c_{ij}(\tau), t_0\right)_{ij}, \ i=\overline{1,N}, \ j=\overline{1,k_i}. \qquad (3.3.1)$$

Примем также, что единицы измерения всех координатных осей времени t_{ij} и $t_{ij}^*(\tau)$ $\forall\tau\in T$, одинаковы. Аналогично, предполагаем равными длины единиц измерения всех координатных осей X_{ij} и $X_{ij}^*(\tau)$ $\forall\tau\in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

По аналогии с I координатной системой, множество параллельных координатных плоскостей

$$X_{ij}^*(\tau)\times t_{ij}^*(\tau), \ i=\overline{1,N}, \ j=\overline{1,k_i},$$

в каждый фиксированный момент времени $\tau\in T$ образуют единую координатно-измерительную систему. Совокупность таких измерительных систем мы назовем *второй адаптивной координатной системой*.

Точки координатных плоскостей $X_{ij}^*(\tau)\times t_{ij}^*(\tau)$ обозначим символами вида:

$$F_{ij}^*=F_{ij}^*(\tau)=\left\{q^*, \tau\right\}_{ij}. \qquad (3.3.2)$$

Разъяснения к записи (3.3.2) почти не отличаются от разъяснений, приведенных ранее к правилу записи (2.2.1) (стр.72-73). А именно, если в записи (2.2.1) заменим круглые скобки фигурными, а в разъяснениях к (2.2.1) формально произведем соответствующие замены $t_{ij}\mapsto t_{ij}^*(\tau)$ и $X_{ij}\mapsto X_{ij}^*(\tau)$, то в итоге, при любом фиксированном значении времени τ получим полный текст разъяснений к правилу записи (3.3.2), которое и будем учитывать при записи

координат любой точки относительно II адаптивной координатной системы.

Буквенные обозначения точек во II адаптивной координатной системе будем отмечать звездочками. Иногда звездочкой будем отмечать также пространственные адаптивные координаты этих точек.

Теперь, согласно (3.3.2) в каждый момент времени τ начало координат (3.3.1) на каждой координатной плоскости $X_{ij}^{*}(\tau)\times t_{ij}^{*}(\tau)$ можем обозначать также символом

$$O_{ij}^{*}(\tau)=\left\{c_{ij}^{*}(\tau), t_{0}\right\}_{ij}, \ i=\overline{1,N}, \ j=\overline{1,k_{i}}. \qquad (3.3.3)$$

Точное определение координаты $c_{ij}^{*}(\tau)$ дано ниже.

Запись всякой точки в виде (3.3.2), т.е. в координатах II адаптивной координатной системы, не приводит к недоразумениям, если учесть, что, применяя *прием*, связанный с формальным отбрасыванием звездочек и заменой фигурных скобок круглыми скобками, мы получим запись совпадающей с ней точки (3.2.1) в координатах I координатной системы.

Однако это, естественно, не обеспечивает совпадения численных значений пространственных адаптивных координат этих точек. Действительно, в соответствии с вышесказанным о разъяснениях к записи (3.3.2), равенства вида

$$F_{ij}^{*}(\tau)=\left\{q^{*}, \tau\right\}_{ij}=(q, \tau)_{ij}=F_{ij}(\tau),$$

будут означать, что точки $F_{ij}^{*}(\tau)$ и $F_{ij}(\tau)$, находящиеся на пересечении τ - несущей плоскости и координатной плоскости $X_{ij}^{*}(\tau)\times t_{ij}^{*}(\tau)$ (или соответственно $X_{ij}\times t_{ij}$), совме-

щаются, и в момент времени τ между численными значениями пространственных адаптивных координат, очевидно, имеет место следующая *формула перехода*:

$$q^* = q - c_{ij}(\tau). \qquad (3.3.4)$$

Формула (3.3.4) позволяет для каждой точки осуществить переход от ее пространственных координат относительно первой координатной системы к ее пространственным координатам относительно второй адаптивной координатной системы.

Обратная формула перехода между численными значениями соответствующих пространственных координат, совмещающихся в момент времени τ точек, очевидно, будет иметь вид:

$$q = q^* + c_{ij}(\tau).$$

Обратной формулой перехода, для каждой точки осуществляется переход от ее пространственных координат относительно II адаптивной координатной системы к ее пространственным координатам относительно I координатной системе.

В частности, учитывая формулу (3.3.4), и соблюдая соответствия по индексам и времени, из сравнения совпадающих начальных точек (3.3.1) и (3.3.3) имеем, что относительно II адаптивной координатной системы на всякой координатной плоскости $X^*_{ij}(\tau) \times t^*_{ij}(\tau)$ $\forall \tau \in T$, справедливы следующие равенства:

$$c^*_{ij}(\tau) = 0 \;\; \forall \tau \in T,\; i = \overline{1,N},\; j = \overline{1,k_i}. \qquad (3.3.5)$$

На рис.8 приведено схематичное изображение второй

адаптивной координатной системы в начальный момент времени.

Замечание о нулях

Равенство (3.3.5) означает, что расстояние от точки с пространственной координатой $q^* = c_{ij}^*(\tau)$ до соответствующей координатной оси времени $t_{ij}^*(\tau)$ в момент времени τ численно равно нулю. Из обратной формулы перехода следует, что та же пространственная координата в момент времени τ относительно дополнительной координатной системы имеет численное значение:

$$q = c_{ij}(\tau).$$

Следуя разъяснениям к записи (3.3.2), можем полагать, что $0^* = 0$, или $0^*(\tau) = 0$ в случае, если известно, что точка с нулевой пространственной координатной находится на пересечении оси времени $t_{ij}^*(\tau)$ с τ - несущей плоскостью. При этом не следует забывать, что приведенные выше формулы перехода относятся только к *совпадающим* точкам, записанным соответственно в различных обозначениях координат относительно двух координатных систем. Равенства $0^* = 0$ и $0^*(\tau) = 0$ не имеют непосредственного отношения к формулам перехода, они, согласно разъяснениям к записи (3.3.2), всего лишь подтверждают «законные права» точек осей времени $t_{ij}^*(\tau)$, иметь численно нулевые пространственные координаты относительно II адаптивной координатной системы.

Граничные и оптимальные точки (2.2.2) (стр.74) относительно II адаптивной координатной системы могут быть записаны в виде:

$$A_{ij}^*(\tau) = \{a_{ij}^*(\tau), \tau\}_{ij}, \quad B_{ij}^*(\tau) = \{b_{ij}^*(\tau), \tau\}_{ij},$$

$$C_{ij}^*(\tau) = \{c_{ij}^*(\tau), \tau\}_{ij}. \tag{3.3.6}$$

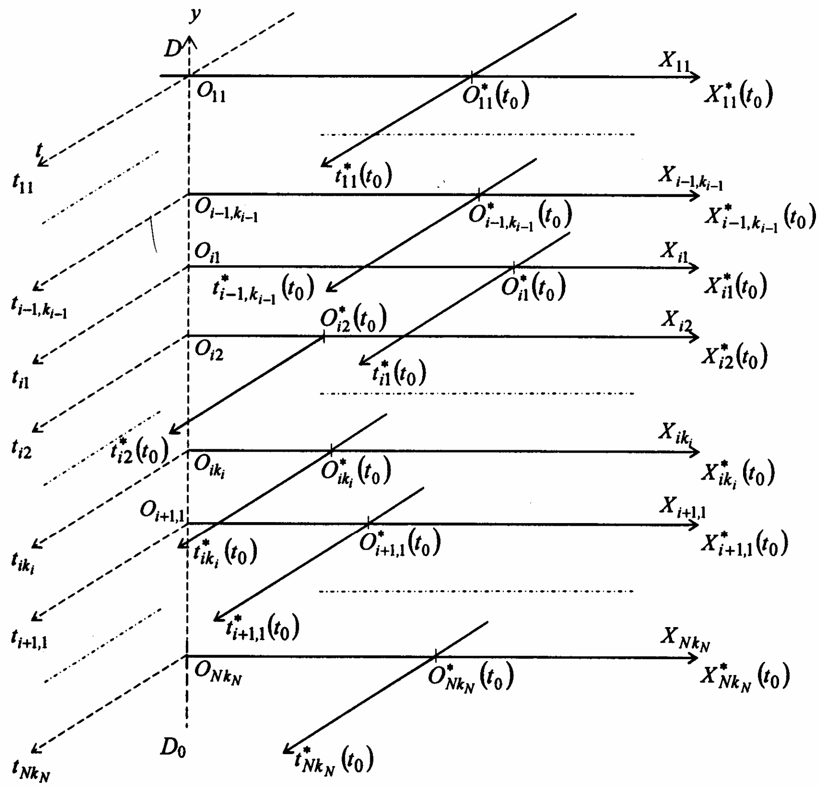


Рис. 8. Возможные положения координатных осей II адаптивной координатной системы относительно I координатной системы в начальный момент времени. В общем случае координатные оси II адаптивной координатной системы во всякий момент времени могут занять в пространстве новые положения, соответствующие пространственным координатам оптимальных точек относительно I координатной системы.

Так как имеют место следующие равенства:

$$A_{ij}(\tau)=A_{ij}^{*}(\tau),\ B_{ij}(\tau)=B_{ij}^{*}(\tau)\ \ \forall\tau\in T,$$

то сравнения записей (2.2.2) и (3.3.6), с учетом формулы перехода (3.3.4), дадут нам следующие соотношения:

$$a_{ij}^{*}(\tau)=a_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau),\ b_{ij}^{*}(\tau)=b_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau), \qquad (3.3.7)$$

откуда, с учетом отношений порядка (1.1.1), имеем

$$a_{ij}^{*}(\tau)<0,\ b_{ij}^{*}(\tau)>0\ \ \forall\tau\in T,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k_i}. \quad (3.3.8)$$

Принимая во внимание замечание о нулях, неравенства (3.3.8) можно представить также следующим эквивалентным образом:

$$a_{ij}^{*}(\tau)<0^{*}(\tau),\ b_{ij}^{*}(\tau)>0^{*}(\tau)\ \ \forall\tau\in T,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k_i}.$$

Из (3.3.5) и (3.3.8) следует, что

$$a_{ij}^{*}(\tau)<c_{ij}^{*}(\tau)<b_{ij}^{*}(\tau)\ \ \forall\tau\in T,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k_i}. \qquad (3.3.9)$$

Неравенства (3.3.9) означают, что отношения порядка (1.1.1), как и следовало ожидать, не только сохраняют силу при переходе от координат первой, к соответствующим координатам второй адаптивной координатной системы, но еще и приобретают дополнительное свойство (3.3.8).

Мы завершили описание II адаптивной координатной системы.

Важное отличие II адаптивной координатной системы от первой состоит в том, что здесь в общем случае любая оптимальная точка, согласно (3.3.5), располагается на некоторой координатной оси времени. Это необычное свойство обеспечивается надлежащими движениями координатных осей и плоскостей новой координатной системы.

Другое отличие между этими двумя координатными системами проявляется в том, что в общем случае исходные положения временных осей в новой координатной системе определяют в пространстве поверхность, а не плоскость времени, как это по определению имело место в I координатной системе.

Цель движений выравнивания, остается прежней, т.е. такой же, как в разделе 3.2, только на этот раз преобразования выравнивания осуществляются в координатах II адаптивной координатной системы.

Мы увидим, что при осуществлении движений выравнивания поверхность времени с переменной конфигурацией преобразовывается в неподвижную плоскость времени, а не наоборот, как это имело место для I координатной системы. Собственно, в этом и заключается третье отличие между двумя координатными системами.

После осуществления движений выравнивания, подвижная II адаптивная координатная система трансформируется к неподвижной координатной системе. Именно эта новая координатно-измерительная система, названная преобразованной адаптивной координатной системой, позволяет нам добиться непротиворечивой реализации идеи упрощения процесса слежения, описанной в предыдущей главе.

Примечание 14:

Из определения 3.3.1 очевидно следует, что временные координаты всех точек τ- несущей плоскости имеют одинаковое численное значение. Именно это обстоятельство создает некий произвол, позволяющий нам для расположения осей времени выбирать в качестве отправных различные геометрические места в про-

странстве, сохраняя при этом неизменными ориентации и параллельность этих осей, и, соответственно само правило измерения временных координат.

В итоге, временные координаты точек не меняются при переходе от одной адаптивной координатной системы к другой адаптивной координатной системе, различающихся исходными пространственными расположениями осей времени.

Анонсом отметим, что в IV главе рассмотрены упрощающие картины наблюдения преобразования для осей времени, оказывающие влияние на способ определения временных координат точек.

3.4. ДВИЖЕНИЯ ВЫРАВНИВАНИЯ ВО II АДАПТИВНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Мы, по аналогии с разделом 3.2, изменив только очередность описания преобразований, определим движения выравнивания сначала для координатных осей времени:

$$t_{ij}^{*}(\tau) \rightarrow t_{ij}^{*}{}', \tag{3.4.1}$$

затем для координатных осей несущей плоскости:

$$X_{ij}^{*}(\tau) \rightarrow X_{ij}^{*}{}', \tag{3.4.2}$$

и, наконец, для точек координатных плоскостей II адаптивной координатной системы:

$$X_{ij}^{*}(\tau) \times t_{ij}^{*}(\tau) \rightarrow X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}',\ \tau \in T,\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, k_i}. \tag{3.4.3}$$

Движения выравнивания, осуществляемые совокупностью, должным образом определенных преобразований (3.4.1)-(3.4.3), позволяют, как это мы увидим, полностью реализовать эффект «танцующей» этажерки, описанный ранее в разделе 3.1.

По определению, движения выравнивания (3.4.1) в каждый момент времени τ являются преобразованиями таких параллельных переносов осей времени, при которых каждая ось времени $t_{ij}^{*}(\tau)$ путем параллельного переноса совмещается с ij - оптимальной горизонталью. Поэтому все ij - оптимальные горизонтали, неподвижные по определению 3.2.1 (стр.106), в результате действия преобразований (3.4.1) приобретают статус неподвижных преобразованных осей времени, имеющих фиксированные пространственные положения. Следовательно, в дальнейшем их можно обозначать без указания зависимости от времени, например, соответствующими, и уже использованными выше, символами $t_{ij}^{*}{}'$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$. Соответственно, сама оптимальная плоскость $Op(T)$ в результате действий преобразований (3.4.1)-(3.4.3) наделяется статусом новой плоскости времени (т.е. становится носителем для координатных осей времени).

Определение 3.4.1. *Оптимальную плоскость $Op(T)$, наделенную действиями преобразований (3.4.1)-(3.4.3) статусом плоскости времени будем называть оптимальной плоскостью времени и обозначать символом $Op^{*}(T)$.*

Для описания преобразований (3.4.1) нам предварительно нужно знать координаты точек осей времени $t_{ij}^{*}(\tau)$ и $t_{ij}^{*}{}'$ относительно II адаптивной координатной системы.

Каждая ось времени $t_{ij}^*(\tau)$, соответствующая моменту времени τ, по определению ортогональна к несущей плоскости и пересекается с ней в соответствующей начальной точке. Откуда, с учетом координат соответствующей по индексам и времени начальной точки (3.3.3), заключаем, что ось $t_{ij}^*(\tau)$ и τ - несущая плоскость пересекаются в точке с координатами $\left\{c_{ij}^*(\tau), \tau\right\}_{ij}$ или, в эквивалентной записи (с учетом замечания о нулях из раздела 3.3), в точке с координатами $\left\{0^*(\tau), \tau\right\}_{ij} = \{0, \tau\}_{ij}$ относительно II адаптивной координатной системы. Эта же точка имеет координатную запись в виде $\left(c_{ij}(\tau), -y_{ij}, \tau\right)$ относительно дополнительной координатной системы, или $\left(c_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij}$ относительно I координатной системы.

Временная ось $t_{ij}^{*\prime}$ и τ - несущая плоскость, согласно уравнению ij - оптимальной горизонтали (3.2.13) пересекутся в точке с координатами $\left(c_{11}(t_0), -y_{ij}, \tau\right)$ относительно дополнительной координатной системы или, то же самое, с координатами $\left(c_{11}(t_0), \tau\right)_{ij}$ относительно I координатной системы. Эту точку, согласно разъяснениям к записи (3.3.2), в координатах II адаптивной координатной системы можно записать в виде $\left\{c_{11}^*(t_0), \tau\right\}_{ij}$, где согласно формуле перехода (3.3.4):

$$c_{11}^*(t_0) = c_{11}(t_0) - c_{ij}(\tau).$$

Таким образом, в силу произвола значений времени, параллельные переносы (3.4.1) во II адаптивной координатной системе можно выразить следующими поточечными сдвигами точек осей времени $t_{ij}^{*}(\tau)$:

$$\left\{c_{ij}^{*}(\tau), \tau\right\}_{ij} + \left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau), \tau\right\}_{ij} = \left\{c_{11}^{*}(t_0), \tau\right\}_{ij}, \qquad (3.4.4)$$

откуда, найдем в явном виде функции сдвигов $\Delta_{ij}^{*}(\tau)$ при соответствующих значениях индексов и времени (см. примечание 15):

$$\Delta_{ij}^{*}(\tau) = c_{11}^{*}(t_0) - c_{ij}^{*}(\tau), \quad \tau \in T, \ i = \overline{1, N}, \ j = \overline{1, k_i}. \qquad (3.4.5)$$

Согласно формулам перехода (3.3.4), равенствам (3.3.5) и обозначениям (3.2.2), из (3.4.5) имеем

$$\Delta_{ij}^{*}(\tau) = c_{11}^{*}(t_0) = c_{11}(t_0) - c_{ij}(\tau) = \Delta_{ij}(\tau), \qquad (3.4.6)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Путем применения приема формального отбрасывания звездочек и заменой фигурных скобок круглыми скобками (стр.112), преобразования (3.4.4) в координатах I координатной системы могут быть записаны в следующем виде

$$\left(c_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij} + \left(\Delta_{ij}(\tau), \tau\right)_{ij} = \left(c_{11}(t_0), \tau\right)_{ij}, \qquad (3.4.7)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

О сравнении формул (3.4.4) и (3.4.7) см. примечание 16.

Так как каждая ось времени $t_{ij}^{*}(\tau)$ ортогональна к несущей плоскости и пересекает ее в начальной точке (3.3.3), то соответствующие параллельным переносам (3.4.1) сдви-

ги начальных точек II адаптивной координатной системы, для произвольно фиксированного момента времени τ , и по аналогии с преобразованиями (3.4.4), можно описать следующими соотношениями:

$$\left\{c_{ij}^{*}(\tau), t_0\right\}_{ij} + \left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau), t_0\right\}_{ij} = \left\{c_{11}^{*}(t_0), t_0\right\}_{ij}, \qquad (3.4.8)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Следует обратить внимание на то, что по причинам, перечисленным ранее в разделе 3.2 (касательно сходства формул (3.2.1) и (3.2.4)), в общем случае формулы сдвига (3.4.8) не могут быть выведены из формул (3.4.4) простой подстановкой $\tau = t_0$.

По аналогии с разделом 3.2, в свою очередь соотношения (3.4.8) позволяют нам, для каждого момента времени τ , определить соответствующие сдвиги (3.4.2), точек координатных осей $X_{ij}^{*}(\tau)$, согласованные (исключающие деформации и изменения ориентаций осей) с параллельными переносами осей времени (3.4.1):

$$\left\{x^{*},\ t_0\right\}_{ij} + \left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau),\ t_0\right\}_{ij} = \left\{x^{*\prime},\ t_0\right\}_{ij}, \qquad (3.4.9)$$

где $\left\{x^{*}, t_0\right\}_{ij}$ – произвольная точка на координатной оси $X_{ij}^{*}(\tau)$, которая в момент времени τ отображается взаимнооднозначным образом в точку $\left\{x^{*\prime}, t_0\right\}_{ij}$ оси $X_{ij}^{*\prime}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Для того чтобы движения (3.4.4) и (3.4.9) координатных осей не вызывали изменения численных значений про-

странственных координат точек координатных плоскостей во II адаптивной координатной системе, нужно, чтобы сдвиги (3.4.3) для этих точек происходили по правилам, устанавливаемым следующими соотношениями:

$$\left\{x^*, \tau\right\}_{ij} + \left\{\Delta^*_{ij}(\tau), \tau\right\}_{ij} = \left\{x^{*\prime}, \tau\right\}_{ij}, \qquad (3.4.10)$$

где $\left\{x^*, \tau\right\}_{ij}$ – произвольная точка на линии пересечения координатной плоскости $X^*_{ij}(\tau)\times t^*_{ij}(\tau)$ и τ - несущей плоскости, которая в момент времени τ отображается взаимнооднозначным образом в соответствующую точку $\left\{x^{*\prime}, \tau\right\}_{ij}$ на линии пересечения плоскости $X^{*\prime}_{ij}\times t^{*\prime}_{ij}$ и τ - несущей плоскости, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

Движения выравнивания (3.4.1)-(3.4.3) полностью определяются соответствующими формулами преобразований (3.4.4),(3.4.9) и (3.4.10).

Для проверки непротиворечивости, например, преобразований (3.4.4) и (3.4.10), поступим следующим образом. Соблюдая соответствия по значениям индексов и времени, и полагая в соотношениях (3.4.10):

$$x^* = c^*_{ij}(\tau) = 0^*(\tau),$$

получим искомые равенства:

$$\left\{c^{*\prime}_{ij}(\tau), \tau\right\}_{ij} = \left\{c^*_{11}(t_0), \tau\right\}_{ij} = \left(c_{11}(t_0), \tau\right)_{ij} \;\; \forall\, \tau \in T. \qquad (3.4.11)$$

Здесь второе равенство получено приемом формального отбрасывания звездочек и заменой фигурных скобок круглыми скобками (стр.112).

Таким образом, все оптимальные точки действиями преобразований (3.4.4),(3.4.9) и (3.4.10) взаимнооднозначным образом отображаются на соответствующие (по индексам) оси времени плоскости $Op^*(T)$ (см. рис.9).

Введем следущее правило для обозначений.

Относительно II адаптивной координатной системы, на каждой координатной плоскости $X_{ij}^*(\tau)\times t_{ij}^*(\tau)$, буквенное обозначение преобразованной движениями выравнивания всякой точки будем отмечать звездочкой со штрихом. Иногда звездочкой со штрихом будем отмечать также пространственные адаптивные координаты этих точек:

$$F_{ij}^{*}{}' = F_{ij}^{*}{}'(\tau) = \{q^{*}{}',\ \tau\}_{ij}. \qquad (3.4.12)$$

В соответствии с правилом записи (3.4.12), образы граничных и оптимальных точек из списка (3.3.6), могут теперь записаны в виде

$$A_{ij}^{*}{}'(\tau) = \{a_{ij}^{*}{}'(\tau),\ \tau\}_{ij}\ ,\ B_{ij}^{*}{}'(\tau) = \{b_{ij}^{*}{}'(\tau),\ \tau\}_{ij}\ ,$$

$$C_{ij}^{*}{}'(\tau) = \{c_{ij}^{*}{}'(\tau),\ \tau\}_{ij}\ . \qquad (3.4.13)$$

Полагая в (3.4.10) $x^* = q^*$ заключаем, что связь между пространственными координатами образов отображения и соответствующих им прообразов, устанавливается следующей формулой

$$q^{*}{}' = q^* + \Delta_{ij}^*(\tau). \qquad (3.4.14)$$

Обратная формула между пространственными координатами этих же точек, очевидно, будет иметь вид:

$$q^* = q^{*}{}' - \Delta_{ij}^*(\tau). \qquad (3.4.15)$$

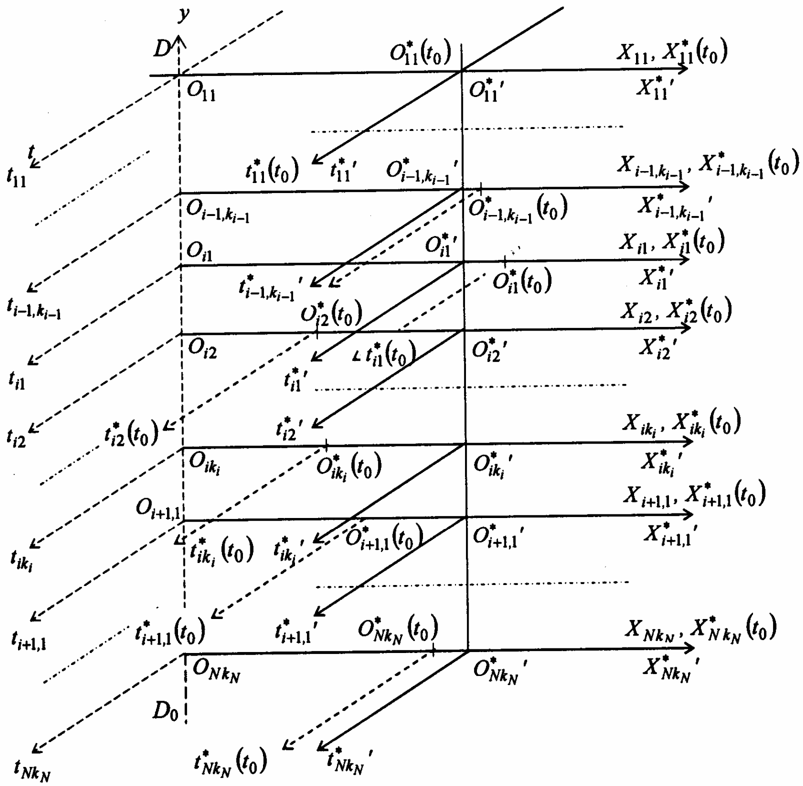


Рис. 9. Положения координатных осей преобразованной движениями выравнивания II адаптивной координатной системы относительно I координатной системы в начальный момент времени. Оси X_{ij}, $X_{ij}^*(t_0)$ и $X_{ij}^*{}'$, отличаются между собой местоположениями начальных точек. При условии $\tau = t_0$ начальная точка имеет координаты $O_{ij}^*{}' = (c_{11}(t_0),\ t_0)_{ij}$ относительно I координатной системы.

(*продолжение текста рисунка вначале стр.126*)

При значениях времени $\tau > t_0$ координаты начальной точки определяются соотношениями $O_{ij}^*{}' = (c_{11}(t_0), \tau)_{ij}$.

Постоянство пространственной координаты приводит к тому, что все координатные оси $X_{ij}^*{}'$ и $t_{ij}^*{}'$, преобразованной движениями выравнивания II адаптивной координатной системы, занимают в пространстве неизменные постоянные положения. При этом оси времени $t_{ij}^*{}'$ определяют в пространстве не поверхность, как это имело место в случае рассмотрения движений выравнивания в I координатной системе, а плоскость времени, совпадающую с оптимальной плоскостью $Op(T)$.

Соблюдая соответствия по индексам и значениям времени, и используя (3.4.14), для пространственных координат образов левой и правой граничных точек имеем:

$$a_{ij}^*{}'(\tau) = a_{ij}^*(\tau) + \Delta_{ij}^*(\tau), \quad b_{ij}^*{}'(\tau) = b_{ij}^*(\tau) + \Delta_{ij}^*(\tau) ,$$

с учетом которых, из отношений порядка (3.3.9) получим следующие отношения порядка:

$$a_{ij}^*{}'(\tau) < c_{ij}^*{}'(\tau) < b_{ij}^*{}'(\tau). \qquad (3.4.16)$$

Неравенства (3.4.16) означают, что отношения порядка (3.3.9), а, следовательно, и отношения порядка (1.1.1), являются инвариантами движений выравнивания (3.4.1)-(3.4.3). Более того, с учетом того, что движения выравнивания, в каждый момент времени и на любой координатной плоскости, описываются преобразованиями сдвига, можно заключить, что отношения порядка будут инвариантами преобразований (3.4.1)-(3.4.3) для пространственных координат произвольных двух попарно сравнимых точек.

Поэтому при любом фиксированном значении времени τ всевозможные точки вида

$$\left\{x^*, \tau\right\}_{ij} \in X_{ij}^*(\tau)\times t_{ij}^*(\tau) \ \ \forall x^* \in \left(a_{ij}^*(\tau), b_{ij}^*(\tau)\right)$$

будут иметь при соответствующих по индексам движениях выравнивания (3.4.1)-(3.4.3), образы

$$\left\{x^*{}', \tau\right\}_{ij} \in X_{ij}^*(\tau)\times t_{ij}^*(\tau),$$

пространственные координаты которых без пропусков заполнять интервал:

$$x^*{}'\in \left(a_{ij}^*{}'(\tau), b_{ij}^*{}'(\tau)\right), \ i=\overline{1,N}\,, \ j=\overline{1,k_i}\,.$$

Для того чтобы убедиться в инвариантности численных значений пространственных координат для точек координатных плоскостей относительно движений выравнивания (3.4.1)-(3.4.3), конечно, можно поступать по аналогии с соответствующими действиями из раздела 3.2. Однако существует и более краткий способ.

В самом деле, с учетом (3.4.5), представим формулу (3.4.10) в следующем эквивалентном виде:

$$\left\{x^* - c_{ij}^*(\tau), \tau\right\}_{ij} = \left\{x^*{}' - c_{11}^*(t_0), \tau\right\}_{ij},$$

или, то же самое, с учетом (3.4.11), в виде следующей формулы:

$$\left\{x^* - c_{ij}^*(\tau), \tau\right\}_{ij} = \left\{x^*{}' - c_{ij}^*{}'(\tau), \tau\right\}_{ij}. \qquad (3.4.17)$$

Смысл формулы (3.4.17) заключается в том, что в любой момент времени τ произвольная точка $\left\{x^*, \tau\right\}_{ij}$ коор-

динатной плоскости $X^*_{ij}(\tau)\times t^*_{ij}(\tau)$, удаленная от временной координатной оси $t^*_{ij}(\tau)$ на величину $\left|x^* - c^*_{ij}(\tau)\right|$, действиями движений выравнивания отображается в точку $\left\{x^{*\prime}, \tau\right\}_{ij}$ плоскости $X^*_{ij}{}'\times t^*_{ij}{}'$ и удаленную от временной оси $t^*_{ij}{}'$ на ту же величину $\left|x^*{}' - c^*_{ij}{}'(\tau)\right|$ $\forall \tau \in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

Здесь, мы воспользовались тем, что все плоскости $X^*_{ij}{}'\times t^*_{ij}{}'$ по отдельности, являются на самом деле обычными двумерными декартовыми координатными плоскостями.

Таким образом, принимая во внимание соотношения (3.4.17) и примечание 14, мы можем констатировать, что при осуществлении преобразований (3.4.4),(3.4.9),(3.4.10) численные значения адаптивных координат всех преобразуемых точек остаются неизменными.

С геометрической точки зрения сказанное означает, что каждая координатная плоскость и установленные на ней координатные оси участвуют в движениях выравнивания как единое целое.

Однако, относительно дополнительной координатной системы подобное свойство инвариантности, в общем случае, присуще только значениям временных координат преобразуемых точек.

Поскольку отмеченная инвариантность касается только численных значений пространственных адаптивных координат, а не пространственных местоположений отвечаю-

щим этим координатам точек.

Идентифицируя для краткости буквенные обозначения точек (2.2.2),(3.3.6),(3.4.13) с их координатными записями в соответствующих координатных системах, получим следующие эквивалентные представления:

$$A_{ij}^{*}{}'(\tau)=A_{ij}^{*}(\tau)+\left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau),\,\tau\right\}_{ij}=A_{ij}(\tau)+\left(\Delta_{ij}(\tau),\,\tau\right)_{ij},$$

$$B_{ij}^{*}{}'(\tau)=B_{ij}^{*}(\tau)+\left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau),\,\tau\right\}_{ij}=B_{ij}(\tau)+\left(\Delta_{ij}(\tau),\,\tau\right)_{ij},\quad(3.4.18)$$

$$C_{ij}^{*}{}'(\tau)=C_{ij}^{*}(\tau)+\left\{\Delta_{ij}^{*}(\tau),\,\tau\right\}_{ij}=\left(c_{11}(t_0),\,\tau\right)_{ij}.$$

Из последнего соотношения в (3.4.18) мы заключаем:

Несмотря на то, что оптимальные функции, как обычные функции, могут принимать самые различные вещественные значения, после действия движений выравнивания, пространственные координаты всех оптимальных точек удается описать всего одним постоянным численным значением $c_{11}(t_0)$ и, причем, в течение всего времени наблюдения.

Этим и достигается цель движений выравнивания.

То же самое мы имели в случае применения движений выравнивания в I координатной системе.

Однако только на основе II адаптивной координатной системы нам удается «идти дальше», т.е. добиться аналогичной упрощающей симметрии для всех без исключения значений граничных функций, причем, без потери этой уже достигнутой симметрии для оптимальных функций.

Решением этой задачи мы займемся в последующих двух разделах.

Примечания:

15. Свойство взаимнооднозначности поточечных преобразований (3.4.4), в частности, вытекает из того, что в произвольный момент времени τ каждое преобразование сдвига осуществляется на отдельной τ - несущей плоскости. Иначе говоря, на координатных плоскостях точечные образы отображений, соответствующие различным моментам времени, окажутся на непересекающихся плоскостях, параллельных несущей плоскости и, значит, будут различными. Сказанное относится и к последующим преобразованиям.

16. Напомним, что при условии $x = c_{ij}(\tau)$, из (3.2.1) следовало равенство: $c'_{ij}(\tau) = c_{11}(t_0) \ \ \forall \tau \in T$, означающее, что образом каждой точки $(c_{ij}(\tau), \tau)_{ij}$, при движениях выравнивания из раздела 3.2, является точка $(c_{11}(t_0), \tau)_{ij}$. То же самое достигается преобразованиями (3.4.7), следовательно, и преобразованиями (3.4.4). Тем не менее, между двумя типами движений выравнивания существуют различия. Первое отличие формальное и состоит в следующем. При движениях выравнивания во II адаптивной координатной системе, как прообразы $(c_{ij}(\tau), \tau)_{ij}$, так и их образы $(c_{11}(t_0), \tau)_{ij}$ оказываются точками пересечений τ - несущей плоскости с координатными осями времени ($t^*_{ij}(\tau)$ и $t^*_{ij}{}'$ соответственно). При движениях выравнивания в I координатной системе, в общем случае, эти же точки не «оказывались» на осях времени. Второе отличие более существенное, и проявляется в том, что оси $t^*_{ij}(\tau)$ образовывают поверхность времени, меняющую в общем случае свою конфигурацию по ходу времени, а оси $t^*_{ij}{}'$ образуют стабильно неподвижную плоскость времени. При движениях выравнивания в I координатной системе, несмотря на одинаковость величин соответствующих сдвигов (3.4.6), мы неизбежно сталкивались с противоположной ситуацией.

3.5. ПРЕОБРАЗОВАННАЯ АДАПТИВНАЯ КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

На пути достижения цели движений выравнивания, посредством осуществления преобразований (3.4.1)-(3.4.3) на базе II адаптивной координатной системы, фактически сформировалась еще одна новая адаптивная координатная система. Теперь мы, по аналогии с определениями предыдущих адаптивных координатных систем, можем утверждать, что совокупность всех параллельных двумерных координатных плоскостей $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$ с координатными осями $X_{ij}^{*}{}'$ и $t_{ij}^{*}{}'$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, образуют единую координатно-измерительную систему, которую мы назовем *преобразованной второй адаптивной координатной системой* или, коротко, *преобразованной адаптивной координатной системой*.

По строению преобразованная адаптивная координатная система намного проще, чем II адаптивная координатная система. Она отличается от I координатной системы геометрическим местоположением в пространстве R_3 плоскости времени.

На самом деле, оптимальная плоскость времени $Op^{*}(T)$ может быть получена от исходной плоскости времени соответствующим параллельным ее переносом на постоянную величину $c_{11}(t_0)$.

Для нас важно, что новая адаптивная координатная система позволяет описать пространственные координаты образов оптимальных точек всего лишь одним постоянным

численным значением. Помимо этого, преобразованная адаптивная координатная система неподвижна относительно дополнительной координатной системы и, как это мы увидим в следующем разделе, не теряет это ценное свойство при осуществлении нужных нам преобразований пространственных координат.

Неподвижность, в сочетании с простотой строения, создают возможности для построения преобразованной адаптивной координатной системы с самого начала, т.е. без всякого предварительного построения первой или даже второй адаптивной координатной системы.

Отмеченные возможности, с учетом сложности динамичной конструкции второй адаптивной координатной системы, имеют большое практическое значение. Они приводят к существенным упрощениям в деле организации слежения, и, конечно, будут учитываться в предлагаемой геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения.

Однако из сказанного выше, отнюдь не следует, что возможно (вообще говоря, с теоретической точки зрения), пренебрегать возможностями II адаптивной координатной системы. Собственно, за исключением описанного в разделе 3.1 частного случая, когда движения выравнивания становились излишними, теоретически нельзя использовать преобразованную адаптивную координатную систему с самого начала. Поскольку, изначальна построенная такая координатная система не в состоянии сохранять структурно неподвижные свойства оптимальной плоскости времени под влиянием действий движений выравнивания. Именно

поэтому, даже само определение оптимальной плоскости времени (определение 3.4.1) нам пришлось ввести только после описания действий движений выравнивания во II адаптивной координатной системе.

Так что с теоретической точки зрения в общем случае переход к преобразованной адаптивной координатной системе в обязательном порядке следует осуществить так, как это было описано в предыдущем разделе, а именно на базе II адаптивной координатной системы. Иначе, мы не сможем получать необходимые и обоснованные формулы для преобразований, обеспечивающих достижения цели.

Однако с практической точки зрения можно обойти этот запрет, ограничившись лишь предположением существования II адаптивной координатной системы. Это позволит нам воспользоваться уже имеющимися готовыми формулами перехода, связующими II адаптивную координатную систему с остальными координатными системами, и, обходиться без ее фактического построения.

Введем следующие обозначения.

Относительно преобразованной адаптивной координатной системы, на каждой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'}\times t_{ij}^{*}{'}$ буквенное обозначение преобразованной движениями выравнивания всякой точки будем отмечать кружочком со штрихом. Иногда кружочком со штрихом будем отмечать также пространственные адаптивные координаты этих точек. При этом, во избежание путаницы, координаты любой точки, относительно преобразованной адаптивной координатной системы, будем записывать с использованием прямых скобок в виде:

$$F_{ij}^{\circ}{}' = F_{ij}^{\circ}{}'(\tau) = \left| q^{\circ}{}', \tau \right|_{ij}. \quad (3.5.1)$$

Как и в случае II адаптивной координатной системы, разъяснения к записи (3.5.1) по содержанию не отличаются от разъяснений, приведенных ранее к правилу записи (2.2.1) (стр.72-73). А именно, если в записи (2.2.1) заменим круглые скобки прямыми скобками, а в разъяснениях к (2.2.1) формально произведем соответствующие замены $t_{ij} \mapsto t_{ij}^{*}{}'$ и $X_{ij} \mapsto X_{ij}^{*}{}'$, то в итоге, получим текст разъяснений к правилу записи (3.5.1), которое и будем учесть при записи любой точки в координатах преобразованной адаптивной координатной системы.

Начало координат произвольной координатной плоскости $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$ преобразованной адаптивной координатной системы, обозначим следующим образом:

$$O_{ij}^{\circ}{}' = \left| 0^{\circ}{}', t_0 \right|_{ij}. \quad (3.5.2)$$

С учетом того, что замечание о нулях из раздела 3.3 легко распространяется и на рассматриваемый случай, получим

$$0^{\circ}{}' = 0, \quad (3.5.3)$$

следовательно, теперь, в координатах преобразованной адаптивной координатной системы точку пересечения любой координатной оси $t_{ij}^{*}{}'$ с τ - несущей плоскостью можем записать в виде

$$\left| 0^{\circ}{}', \tau \right|_{ij} = \left| 0, \tau \right|_{ij}. \quad (3.5.4)$$

В частности, из (3.5.4) можно вывести уравнение ij -оп-

тимальной горизонтали относительно преобразованной адаптивной координатной системы:

$$\left| x^{\circ}{}', \tau \right|_{ij} = \left| 0, \tau \right|_{ij}.$$

Учитывая (3.4.11),(3.5.2) и (3.5.3) нетрудно заключить, что для обозначения начала координат мы, в зависимости от конкретной выбранной координатной системы, можем применять одну из следующих эквивалентных между собой записей

$$O_{ij}^{\circ}{}' = \left| 0^{\circ}{}', t_0 \right|_{ij} = \left| 0, t_0 \right|_{ij} = \left\{ c_{ij}^{*}{}'(\tau), t_0 \right\}_{ij} = \left\{ c_{11}^{*}(t_0), t_0 \right\}_{ij} =$$

$$= \left(c_{11}(t_0), t_0 \right)_{ij}. \qquad (3.5.5)$$

В соответствии с вышесказанным о разъяснениях к записи (3.5.1), равенства вида

$$F_{ij}^{*}{}'(\tau) = \left\{ q^{*}{}', \tau \right\}_{ij} = \left| q^{\circ}{}', \tau \right|_{ij} = F_{ij}^{\circ}{}'(\tau)$$

будут означать, что точки $F_{ij}^{*}{}'(\tau)$ и $F_{ij}^{\circ}{}'(\tau)$, находящиеся в момент времени τ на плоскостях $X_{ij}^{*}(\tau) \times t_{ij}^{*}(\tau)$ и $X_{ij} \times t_{ij}$ соответственно, совмещаются, и в момент времени τ между численными значениями соответствующих пространственных адаптивных координат, очевидно, имеет место следующая *формула перехода*:

$$q^{*}{}' = q^{\circ}{}' + \Delta_{ij}(\tau), \qquad (3.5.6)$$

откуда с учетом (3.4.14), имеем

$$q^{\circ}{}' = q^{*}, \qquad (3.5.7)$$

или же, с учетом здесь формулы перехода (3.3.4), получим следующую *формулу перехода*:

$$q^{\circ}{}' = q - c_{ij}(\tau),\ \tau \in T,\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,k_i}. \qquad (3.5.8)$$

Формулу (3.5.8) иногда будем называть также формулой *преобразований сдвига*.

Среди приведенных выше формул перехода, формула (3.5.8) оказывается наиболее востребованным для дальнейшего изложения. Дело в том, что в каждый момент времени τ вся имеющаяся и поступающая от датчиков текущая информация описывается исключительно в пространственных координатах I координатной системы. Формула (3.5.8) позволяет в каждый момент времени τ перейти, посредством соответствующего сдвига, от этих координат к соответствующим (по индексам и времени) пространственным координатам преобразованной адаптивной координатной системы.

А преобразования растяжения-сжатия, которые мы рассмотрим в следующем разделе, будут осуществлены именно в преобразованной адаптивной координатной системе.

Обратная формула перехода, позволяющая в каждый момент времени τ перейти от пространственных координат точек в преобразованной адаптивной координатной системе к соответствующим (по индексам и времени) пространственным координатам I координатной системы, очевидно, определяется равенством

$$q = q^{\circ}{}' + c_{ij}(\tau),\ \tau \in T,\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,k_i}. \qquad (3.5.9)$$

Соблюдая соответствия по индексам и времени, из формулы (3.5.8) (или (3.5.9)) при значении $q = c_{ij}(\tau)$ имеем

$$c_{ij}^{\circ}{}'(\tau) = 0,\ \tau \in T,\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,k_i}. \qquad (3.5.10)$$

В соответствии с правилом записи (3.5.1), образы граничных и оптимальных точек из списка (3.3.6) могут быть записаны в виде

$$A_{ij}^{\circ}{}'(\tau) = \left| a_{ij}^{\circ}{}'(\tau), \tau \right|_{ij}, \; B_{ij}^{\circ}{}'(\tau) = \left| b_{ij}^{\circ}{}'(\tau), \tau \right|_{ij},$$

$$C_{ij}^{\circ}{}'(\tau) = \left| c_{ij}^{\circ}{}'(\tau), \tau \right|_{ij}. \qquad (3.5.11)$$

Принимая во внимание (3.5.7), из отношений порядка (3.3.9) сразу же получим

$$a_{ij}^{\circ}{}'(\tau) < c_{ij}^{\circ}{}'(\tau) < b_{ij}^{\circ}{}'(\tau) \;\; \forall \tau \in T, \; i = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,k_i}. \quad (3.5.12)$$

Неравенства (3.5.12) означают, что отношения порядка (3.3.9) а, следовательно, и отношения порядка (1.1.1) являются инвариантами движений выравнивания (3.4.1)-(3.4.3).

Более того, с учетом того, что движения выравнивания в каждый момент времени и на всякой координатной плоскости описываются преобразованиями сдвига, можно заключить следующее:

Отношения порядка для пространственных координат произвольных двух попарно сравнимых точек (стр.85) в I координатной системе, являются инвариантами преобразований (3.4.1)-(3.4.3).

Поэтому при каждом значении времени τ всевозможные точки $(x, \tau)_{ij} \in X_{ij} \times t_{ij} \;\; \forall x \in (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau))$ будут иметь при соответствующих (по индексам) непрерывных движениях выравнивания (3.4.1)-(3.4.3) образы:

$$\left| x^{\circ}{}', \tau \right|_{ij} \in X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}',$$

пространственные координаты которых без пропусков заполнять открытый интервал:

$$x^{\circ}{}' \in \left(a_{ij}^{\circ}{}'(\tau),\, b_{ij}^{\circ}{}'(\tau)\right),\ i = \overline{1,N}\ ,\ \ j = \overline{1,k_i}\ .$$

Здесь связь между соответствующими пространственными координатами обеспечивается формулами перехода (3.5.8),(3.5.9).

Из неравенств (3.3.8) (или (3.5.12)), с учетом равенств (3.5.7) (или (3.5.10)), имеем

$$a_{ij}^{\circ}{}'(\tau) < 0\ ,\ b_{ij}^{\circ}{}'(\tau) > 0\ \ \forall \tau \in T\ ,\ i = \overline{1,N}\ ,\ \ j = \overline{1,k_i}\ . \quad (3.5.13)$$

Преобразованная адаптивная координатная система позволяет нам приступить к непротиворечивому описанию двух специальных преобразований растяжения-сжатия, одновременно действующих на линии пересечения всякой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$ и любой τ - несущей плоскости. Они будут рассмотрены в следующем разделе.

При этом оси $t_{ij}^{*}{}'$ будут нести тройную «нагрузку», а именно, с одной стороны, они – неподвижные координатные оси времени преобразованной адаптивной координатной системы и, с другой стороны, содержат все преобразованные движениями выравнивания (3.4.1)-(3.4.3) оптимальные точки:

$$C_{ij}^{\circ}{}'(\tau)\ \ \forall \tau \in T\ ,\ i = \overline{1,N}\ ,\ \ j = \overline{1,k_i}\ ,$$

и, наконец, с третьей стороны, оказываются центрами рассматриваемых в следующем разделе преобразований растяжения-сжатия.

На рис.10 приведено схематическое изображение преобразованной адаптивной координатной системы.

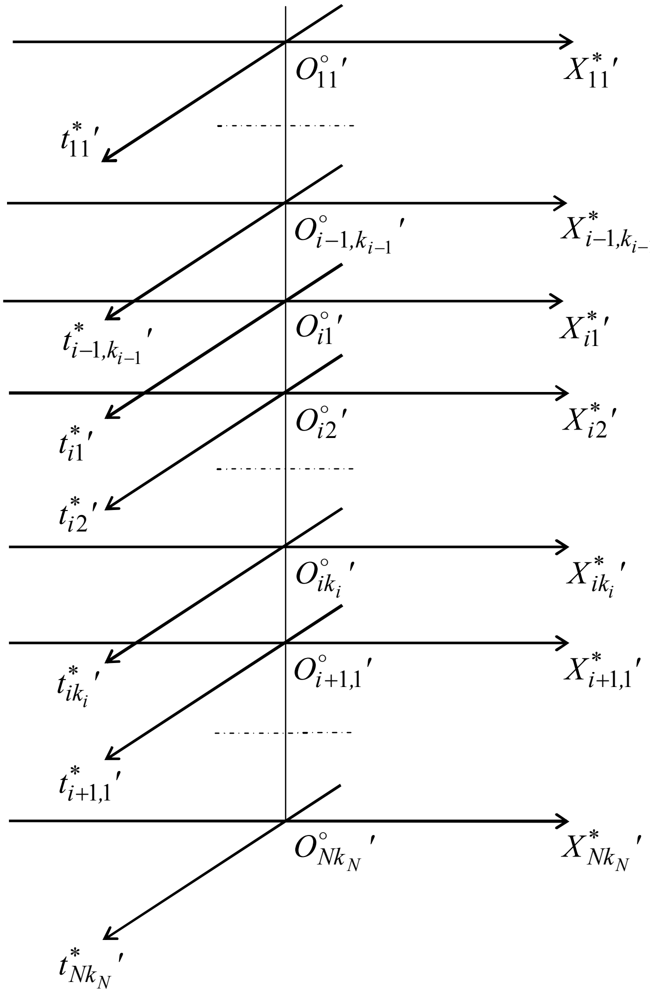


Рис.10. Преобразованная адаптивная координатная система. Из сравнения данного изображения с изображением, приведенном на рис.9, несложно усмотреть, что

$$O^{\circ}_{ij}{}' = \left|\, 0,\ t_0 \right|_{ij} = \left(c_{11}\left(t_0\right),\ t_0\right)_{ij} = O^{*}_{ij}{}'.$$

3.6. КОМПОЗИЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ниже, мы исходим из перспективы обеспечения следующего условия:

На всякой координатной плоскости преобразованной адаптивной координатной системы и в каждый момент времени одновременно реализуемые два преобразования растяжения-сжатия, которые мы рассмотрим, должны иметь общий неподвижный центр преобразований, находящиеся на соответствующей (по индексам) координатной оси времени.

Рассмотрим следующие две трехпараметрические преобразования растяжения-сжатия, которые в каждый момент времени действуют одновременно в преобразованной адаптивной координатной системе (и соответственно по разные стороны от оптимальной плоскости времени $Op^*(T)$).

В произвольный момент времени $\tau \in T$ (время – один из параметров преобразований) на всякой координатной плоскости $X_{ij}^*{}'\times t_{ij}^*{}'$ точки $\left|x^{\circ}{}', \tau\right|_{ij}$, расположенные в пространстве R_3 по левую сторону от плоскости $Op^*(T)$, отобразим следующими преобразованиями:

$$\left|x^{\circ}{}'', \tau\right|_{ij} = \left|-\lambda\, x^{\circ}{}' \big/ \overset{\circ}{a}_{ij}{}'(\tau), \tau\right|_{ij}, \quad x^{\circ}{}' \leq 0, \tag{3.6.1}$$

а точки $\left|x^{\circ}{}', \tau\right|_{ij}$, расположенные в пространстве по правую сторону от плоскости $Op^*(T)$, отобразим преобразованиями вида:

$$\left|x^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij}=\left|\mu\,x^{\circ}{'}\big/b_{ij}^{\circ}{'}(\tau),\,\tau\right|_{ij},\quad x^{\circ}{'}\geq 0\,. \qquad (3.6.2)$$

Здесь параметры преобразований λ и μ – положительные вещественные числа (т.е. определены также, как это было в (2.3.1),(2.3.2)), $\tau\in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

В силу неравенств (3.5.13) в соотношениях (3.6.1), (3.6.2) случаи деления на нуль исключаются.

О других подробностях по поводу законности этих преобразований см. примечание 17.

Одновременными действиями преобразований (3.6.1) и (3.6.2) произвольные две точки

$$\left|x_1^{\circ}{'},\,\tau\right|_{ij},\ x_1^{\circ}{'}<0 \text{ и } \left|x_2^{\circ}{'},\,\tau\right|_{ij},\ x_2^{\circ}{'}>0\,,$$

координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'}\times t_{ij}^{*}{'}$, одновременно и взаимнооднозначным образом отображаются в соответствующие точки

$$\left|x_1^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij} \text{ и } \left|x_2^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij}$$

той же плоскости.

На всякой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'}\times t_{ij}^{*}{'}$ при любых фиксированных значениях τ, λ и μ обе зависимости $x^{\circ}{''}=x^{\circ}{''}\left(x^{\circ}{'},\,\tau,\,\lambda\right)$ и $x^{\circ}{''}=x^{\circ}{''}\left(x^{\circ}{'},\,\tau,\,\mu\right)$, определяемые по пространственным координатам соответствующих преобразований (3.6.1) и (3.6.2), являются линейными непрерывными и строго монотонно возрастающими функциями по аргументу $x^{\circ}{'}$ в областях $x^{\circ}{'}<0$ и $x^{\circ}{'}>0$ соответственно.

Свойство взаимнооднозначности отображений (3.6.1) и (3.6.2) вытекает из того, что функции $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}\left(x^{\circ}{'},\, \tau,\, \lambda\right)$ и $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}\left(x^{\circ}{'},\, \tau,\, \mu\right)$ имеют при равенстве $x^{\circ}{'} = 0$ общее нулевое значение, и вместе определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $x^{\circ}{'} \in (-\infty,\, \infty)$ при любых фиксированных значениях индексов i, j и параметров τ, λ, μ.

Введем следующие обозначения.

В преобразованной адаптивной координатной системе на каждой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'} \times t_{ij}^{*}{'}$, буквенное обозначение всякого образа отображений (3.6.1)-(3.6.2), будем отмечать кружочком с двумя штрихами. Иногда, кружочком с двумя штрихами будем отмечать и пространственные адаптивные координаты этих точек.

Координаты каждой такой точки в преобразованной адаптивной координатной системе, запишем в виде:

$$F_{ij}^{\circ}{''} = F_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| q^{\circ}{''},\, \tau \right|_{ij}. \tag{3.6.3}$$

В произвольный момент времени τ и на каждой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'} \times t_{ij}^{*}{'}$, между пространственными координатами точек (3.6.3) и (3.5.1) существуют следующие формулы перехода, вытекающие очевидным образом из преобразований (3.6.1) и (3.6.2):

$$q^{\circ}{''} = -\lambda\, q^{\circ}{'} \big/ a_{ij}^{\circ}{'}(\tau)\,, \quad q^{\circ}{'} \le 0\,, \tag{3.6.4}$$

$$q^{\circ}{''} = \mu\, q^{\circ}{'} \big/ b_{ij}^{\circ}{'}(\tau)\,, \quad q^{\circ}{'} \ge 0\,. \tag{3.6.5}$$

Очевидно, что формулы перехода (3.6.4),(3.6.5) являются *преобразованиями растяжения-сжатия*. Из формул (3.6.4) и (3.6.5), с учетом формулы преобразований сдвига (3.5.8), получим следующие формулы перехода:

$$q^{\circ}{''} = -\lambda\left(q - c_{ij}(\tau)\right)/\left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \quad q \le c_{ij}(\tau), \quad (3.6.6)$$

$$q^{\circ}{''} = \mu\left(q - c_{ij}(\tau)\right)/\left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \quad q \ge c_{ij}(\tau), \quad (3.6.7)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

В силу отношений порядка (1.1.1), в формулах (3.6.6) и (3.6.7) случаи деления на нуль исключаются.

Формулы перехода (3.6.6) и (3.6.7) являются *композициями преобразований* сдвига (3.5.8) и преобразований растяжения-сжатия (3.6.4) и (3.6.5). Этими формулами устанавливается связь между исходными пространственными координатами прообразов $F_{ij}(\tau) = (q, \tau)_{ij}$, определенных относительно I координатной системы, и пространственными координатами соответствующих им образов

$$F_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| q^{\circ}{''}, \tau \right|_{ij},$$

определенных относительно преобразованной адаптивной координатной системы.

То, что в записях формул (3.6.6) и (3.6.7) в явном виде не использованы координаты II адаптивной координатной системы, с практической точки зрения позволяет нам обойтись без фактического построения этой сложной координатной системы. Нам достаточно будет лишь подразумевать существования II адаптивной координатной системы, без которой наши действия лишаются законного теорети-

ческого обоснования.

Аналогичным путем, из формул преобразований растяжения-сжатия (3.6.1) и (3.6.2), с учетом формулы преобразований сдвига (3.5.8), имеем

$$\left| x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij} = \left| -\lambda\left(x - c_{ij}(\tau)\right) / \left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau \right|_{ij}, \ x \le c_{ij}(\tau), \quad (3.6.8)$$

$$\left| x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij} = \left| \mu\left(x - c_{ij}(\tau)\right) / \left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau \right|_{ij}, \ x \ge c_{ij}(\tau). \quad (3.6.9)$$

С некоторыми небольшими изменениями, все сказанное о преобразованиях (3.6.1) и (3.6.2) относится и к преобразованиям (3.6.8) и (3.6.9), являющимися *композициями преобразований* соответствующих двух преобразований сдвига и растяжения-сжатия. А именно, одновременными действиями преобразований (3.6.8) и (3.6.9), произвольные две точки $(x_1, \tau)_{ij}$ и $(x_2, \tau)_{ij}$, $x_1 < c_{ij}(\tau)$, $x_2 > c_{ij}(\tau)$, координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ первой координатной системы, взаимнооднозначным образом отображаются в соответствующие точки $\left| x_1^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}$ и $\left| x_2^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}$ координатной плоскости $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$ преобразованной адаптивной координатной системы. На всякой координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ при произвольных фиксированных значениях τ, λ и μ, обе зависимости $x^{\circ}{}'' = x^{\circ}{}''(x, \tau, \lambda)$ и $x^{\circ}{}'' = x^{\circ}{}''(x, \tau, \mu)$, определяемые формулами перехода (3.6.6) и (3.6.7), являются линейными непрерывными и строго монотонно возрастающими функциями по аргументу x в соответствующих областях $x < c_{ij}(\tau)$ и $x > c_{ij}(\tau)$.

Точно так же, как и в случае рассмотрения преобразований (3.6.1),(3.6.2), свойство взаимнооднозначности композиций отображений (3.6.8),(3.6.9) вытекает из того, что функции $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}(x,\tau,\lambda)$ и $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}(x,\tau,\mu)$ имеют при равенстве $x = c_{ij}(\tau)$ общее нулевое значение и вместе они определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $x \in (-\infty,\infty)$ при произвольных фиксированных значениях индексов i, j и параметров преобразований τ, λ, μ.

С учетом (3.6.3), образы граничных и оптимальных точек (3.5.11), полученные действиями преобразований (3.6.1) и (3.6.2) или, то же самое, композиций преобразований (3.6.8) и (3.6.9), запишем в виде

$$A_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| a_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij}, \quad B_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| b_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij},$$

$$C_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| c_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij}. \tag{3.6.10}$$

Соблюдая соответствия по значениям индексов и времени, и полагая $x^{\circ}{'} = a_{ij}^{\circ}{'}(\tau)$ в (3.6.1) (или, с учетом (3.5.8): $x = a_{ij}(\tau)$ в (3.6.8)), для соответствующих пространственных координат образов левых граничных точек в преобразованной адаптивной координатной системе, получим

$$a_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = -\lambda, \; \tau \in T, \; i = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,k_i}. \tag{3.6.11}$$

Аналогичным образом, соблюдая соответствия по значениям индексов и времени, и полагая в (3.6.2) $x^{\circ}{'} = b_{ij}^{\circ}{'}(\tau)$ (или, с учетом (3.5.8): $x = b_{ij}(\tau)$ в (3.6.9)), для соответ-

ствующих пространственных координат образов правых граничных точек в преобразованной адаптивной координатной системе, имеем

$$b_{ij}^{\circ}{}''(\tau)=\mu\,,\ \tau\in T\,,\ i=\overline{1,N}\,,\ j=\overline{1,k_i}\,. \qquad (3.6.12)$$

Вновь, соблюдая соответствия по значениям индексов и времени, и полагая в любом из соотношений (3.6.1) или (3.6.2) $x^{\circ}{}'=c_{ij}^{\circ}{}'(\tau)=0$ (здесь последнее равенство повторяет формулу (3.5.10)) или, с учетом (3.5.8): $x=c_{ij}(\tau)$, в любом из соотношений (3.6.8) или (3.6.9), для соответствующих пространственных координат образов оптимальных точек имеем

$$c_{ij}^{\circ}{}''(\tau)=0\,,\ \tau\in T\,,\ i=\overline{1,N}\,,\ j=\overline{1,k_i}\,. \qquad (3.6.13)$$

Иначе говоря, все оптимальные точки

$$C_{ij}^{\circ}{}'(\tau)=\left|c_{ij}^{\circ}{}'(\tau),\tau\right|_{ij}=\left|\,0,\tau\right|_{ij},$$

в преобразованной адаптивной координатной системе, вне зависимости от допустимых значений индексов и времени, являются неподвижными точками преобразований (3.6.1), (3.6.2). Это, в частности находит свое отражение в записях

$$C_{ij}^{\circ}{}''(\tau)=\left|\,0,\tau\right|_{ij}\ \ \forall\tau\in T\,,\ i=\overline{1,N}\,,\ j=\overline{1,k_i}\,.$$

Поскольку каждая ось времени $t_{ij}^{*}{}'$ состоит из точек, имеющих координаты $\left|\,0,\tau\right|_{ij}$ относительно преобразованной адаптивной координатной системы, то смысл полученных равенств заключается в том, что все оси времени $t_{ij}^{*}{}'$, а, следовательно, и сама оптимальная плоскость времени

$Op^*(T)$ остаются неподвижными при действиях преобразований растяжения-сжатия (3.6.1),(3.6.2).

Очевидно также, что именно точки, имеющие координаты $|0, \tau|_{ij}$ являются центрами преобразований (3.6.1) и (3.6.2).

В итоге, можно констатировать, что в каждый момент времени и на всякой координатной плоскости преобразованной адаптивной координатной системы при одновременных действиях двух преобразований (3.6.1) и (3.6.2) не возникает неопределенности, связанной с геометрической конфигурацией поверхности времени. Поскольку мы на этот раз имеем дело не с поверхностью, а с плоскостью времени, к тому же, остающееся неподвижной при одновременных действиях преобразований (3.6.1) и (3.6.2).

То же самое справедливо и в отношении действий композиций преобразований (3.6.8) и (3.6.9).

Действительно, сначала действиями движений выравнивания (3.4.1)-(3.4.3) II адаптивная координатная система, имеющая в общем случае сложную динамически меняющуюся структуру, переходит в преобразованную адаптивную координатную систему, обладающей простой статически неподвижной структурой.

При этом поверхность времени с переменной конфигурацией, служащая для определения пространственных координат точек относительно II адаптивной координатной системы, преобразовывается в оптимальную плоскость времени, служащей для определения пространственных координат точек относительно преобразованной адаптивной

координатной системы.

Далее, мы оказываемся в условиях применения тех же преобразований растяжения-сжатия (3.6.1) и (3.6.2), оставляющих неподвижной оптимальную плоскость времени. Вследствие этого, совместные действия композиций преобразований (3.6.8) и (3.6.9) не приводят к какому-либо противоречию, связанному с неопределенностью местоположения временных осей в пространстве.

По этой причине, естественно, в названиях как преобразований (3.6.1),(3.6.2), так и композиций преобразований (3.6.8),(3.6.9) не нужно использовать термин «формальный», чего в общем случае нельзя было допускать в отношении названий преобразований (2.3.1) и (2.3.2).

Выясним некоторые дополнительные свойства рассмотренных выше преобразований.

Из (3.6.11)-(3.6.13) следуют отношения порядка:

$$\overset{\circ}{a}_{ij}''(\tau) < \overset{\circ}{c}_{ij}''(\tau) < \overset{\circ}{b}_{ij}''(\tau) \quad \forall \tau \in T \, , \; i = \overline{1, N} \, , \; j = \overline{1, k_i} \, . \quad (3.6.14)$$

Отношения порядка (3.6.14), вместе с ранее установленной цепочкой отношений порядка (3.3.9),(3.4.16) и (3.5.12), доказывают, что исходные отношения порядка (1.1.1) являются инвариантами как преобразований растяжения-сжатия (3.6.1),(3.6.2), так и композиций преобразований (3.6.8),(3.6.9). В силу (3.6.11)-(3.6.13), инвариантами этих преобразований являются и неравенства (3.5.13):

$$\overset{\circ}{a}_{ij}''(\tau) < 0 \, , \; \overset{\circ}{b}_{ij}''(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in T \, , \; i = \overline{1, N} \, , \; j = \overline{1, k_i} \, .$$

Композиции преобразований (3.6.8),(3.6.9) – непрерывные и обратимые, поскольку каждая из них состоит из двух последовательно действующих непрерывных и обратимых

преобразований специального вида Ниже, в явном виде приведены непрерывные преобразования, обратные к композициям преобразований.

Таким образом, обе композиции преобразований (3.6.8) и (3.6.9) являются *гомеоморфизмами*.

Кроме того, выше было отмечено, что обе функции $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}(x, \tau, \lambda)$ и $x^{\circ}{''} = x^{\circ}{''}(x, \tau, \mu)$, определяемые зависимостями (3.6.6) и (3.6.7), вместе определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $x \in (-\infty, \infty)$ при любых фиксированных значениях индексов i, j и параметров τ, λ, μ.

Аналогичные свойства присущи и обратным функциям $x = x(x^{\circ}{''}, \tau, \lambda)$ и $x = x(x^{\circ}{''}, \tau, \mu)$, что легко следует, например, из приведенных ниже формул (3.6.15) и (3.6.16).

Итак, мы приходим к следующим выводам:

1. Отношения порядка между пространственными координатами произвольных двух попарно сравнимых точек в I координатной системе являются инвариантами композиций преобразований (3.6.8),(3.6.9);

2. При всяком значении времени $\tau \in T$ всевозможные точки $(x, \tau)_{ij} \in X_{ij} \times t_{ij} \quad \forall x \in (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau))$ будут иметь при действиях соответствующих (по индексам) композиций преобразований (3.6.8),(3.6.9) образы:

$$\left| x^{\circ}{''}, \tau \right|_{ij} \in X_{ij}^{*}{'} \times t_{ij}^{*}{'},$$

пространственные координаты которых без пропусков заполняют открытый интервал, расположенный на пересении τ - несущей плоскости с координатной плоскостью

$X_{ij}^{*}{}'\times t_{ij}^{*}{}'$:

$$x^{\circ}{}''\in\left(a_{ij}^{\circ}{}''(\tau),\, b_{ij}^{\circ}{}''(\tau)\right)\equiv(-\lambda,\,\mu),\ i=\overline{1,N}\,,\ j=\overline{1,k_i}\,.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Из формул (3.6.6),(3.6.7) следуют соотношения для обратных преобразований:

$$q=c_{ij}(\tau)-\frac{1}{\lambda}\left(a_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau)\right)q^{\circ}{}'',\ \ q^{\circ}{}''\le 0\,,\qquad(3.6.15)$$

$$q=c_{ij}(\tau)+\frac{1}{\mu}\left(b_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau)\right)q^{\circ}{}'',\ \ q^{\circ}{}''\ge 0\,.\qquad(3.6.16)$$

Очевидно, что зависимости (3.6.15) и (3.6.16) вместе определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $q^{\circ}{}''\in(-\infty,\,\infty)$ при любых фиксированных значениях индексов i, j и параметров τ, λ, μ.

В дальнейшем формулы (3.6.6),(3.6.7),(3.6.15) и (3.6.16) будем называть *основными формулами перехода*.

Соответствующие обратные к (3.6.1) и (3.6.2) преобразования, очевидно, описываются соответственно следующими формулами:

$$\left|x^{\circ}{}',\,\tau\right|_{ij}=\left|-a_{ij}^{\circ}{}'(\tau)\,x^{\circ}{}''\big/\lambda,\,\tau\right|_{ij},\ x^{\circ}{}''\le 0\,,$$

$$\left|x^{\circ}{}',\,\tau\right|_{ij}=\left|-b_{ij}^{\circ}{}'(\tau)\,x^{\circ}{}''\big/\mu,\,\tau\right|_{ij},\ x^{\circ}{}''\ge 0\,,$$

где $\tau\in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

С практической точки зрения для нас ценность (наравне с преобразованиями (3.6.15) и (3.6.16)) представляют

также следующие отображения, обратные к соответствующим композициям преобразований (3.6.8) и (3.6.9):

$$\left|x,\,\tau\right|_{ij}=\left|c_{ij}(\tau)-\frac{1}{\lambda}\left(a_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau)\right)x^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij},\quad x^{\circ}{''}\le 0\,,\quad(3.6.17)$$

$$\left|x,\,\tau\right|_{ij}=\left|c_{ij}(\tau)+\frac{1}{\mu}\left(b_{ij}(\tau)-c_{ij}(\tau)\right)x^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij},\quad x^{\circ}{''}\ge 0\,.\quad(3.6.18)$$

Здесь, одновременными действиями преобразований (3.6.17) и (3.6.18) произвольные две точки

$$\left|x_1^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij},\; x_1^{\circ}{''}<0\,,\text{ и }\left|x_2^{\circ}{''},\,\tau\right|_{ij},\; x_2^{\circ}{''}>0\,,$$

координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'}\times t_{ij}^{*}{'}$ преобразованной адаптивной координатной системы, взаимнооднозначным образом отображаются в соответствующие точки $(x_1,\tau)_{ij}$ и $(x_2,\tau)_{ij}$ координатной плоскости $X_{ij}\times t_{ij}$ первой координатной системы.

На всякой координатной плоскости $X_{ij}^{*}{'}\times t_{ij}^{*}{'}$ при произвольных фиксированных значениях τ, λ и μ обе зависимости $x=x\left(x^{\circ}{''},\,\tau,\,\lambda\right)$ и $x=x\left(x^{\circ}{''},\,\tau,\,\mu\right)$, описываемые формулами перехода (3.6.15) и (3.6.16), вместе определяют одну линейную непрерывную строго монотонно возрастающую функцию по аргументу $x^{\circ}{''}\in(-\infty,\,\infty)$.

Мы завершили описание важных свойств координатных систем, введенных для обоснования законности упрощающих преобразований пространственных координат граничных и оптимальных точек. Существующие переходы

между ними условно изображены в следующих схемах:

$$\left(\text{Первая КС}\right)\leftrightarrow\left\{\text{Вторая АКС}\right\}\leftrightarrow\left|\text{ ПАКС }\right|, \qquad (3.6.19)$$

$$\left(\text{Первая КС}\right)\xleftrightarrow{\text{Композиции преобразований}}\left|\text{ ПАКС }\right|. \qquad (3.6.20)$$

где аббревиатуры составлены из начальных букв слов, имеющихся в выражении «Преобразованная Адаптивная Координатная Система», а двусторонние стрелки подчеркивают обратимый характер переходов.

В схеме (3.6.19) связи между соответствующими пространственными координатами точек в трех различных координатных системах, определяются формулами перехода (3.3.4),(3.4.14),(3.5.6)-(3.5.9),(3.6.4),(3.6.5), а в схеме (3.6.20) аналогичные связи заданы основными формулами перехода (3.6.6),(3.6.7),(3.6.17),(3.6.18).

Основные формулы перехода позволяют в процессе наблюдения вместо сложной схемы (3.6.19), предполагающей обязательного построения II адаптивной координатной системы, реализовать более практичную и простую схему (3.6.20), в которой можно довольствоваться лишь предположением существования II адаптивной координатной системы.

Следует подчеркнуть, что предположение о существовании II адаптивной координатной системы, наравне с базовой I координатной системой, является важным. Нужно помнить, что без II адаптивной координатной системы мы лишаемся обоснования законности упрощающих преобразований пространственных координат граничных и оптимальных точек (см. об этом примечание 18).

А в том, что мы действительно уже достигли основных

намеченных упрощений, не может быть никаких сомнений.

В самом деле, с одной стороны, нам известно, что исходные граничные и оптимальные функции, как обычные функции, в каждый допустимый момент времени могут принимать самые различные значения и, кроме того, общее количество этих функций, в общем случае, может быть довольно большим (равно $3n$). С другой стороны, принимая во внимание в записях граничных и оптимальных точек (3.6.10) соотношения (3.6.11)-(3.6.13), имеем

$$\overset{\circ}{A}_{ij}''(\tau)=\left|-\lambda,\,\tau\right|_{ij}\,,\ \overset{\circ}{B}_{ij}''(\tau)=\left|\mu,\,\tau\right|_{ij}\,,\ \overset{\circ}{C}_{ij}''(\tau)=\left|0,\,\tau\right|_{ij}\,, \quad (3.6.21)$$

где $\tau \in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

Так что, сами соотношения (3.6.21) показывают, что в течение всего процесса слежения образы всех граничных и оптимальных функций при отображениях (3.6.8) и (3.6.9), могут быть описаны всего тремя числами. При этом важно, что отношения порядка между пространственными координатами для произвольных двух попарно сравнимых точек в I координатной системе, являются инвариантами композиций преобразований (3.6.8) и (3.6.9).

На рис.11 и 12 (см. после текстов примечаний) изображены пространственные положения точек (3.6.21). Из них видно, что в каждый момент времени τ образы левых граничных точек $\overset{\circ}{A}_{ij}''(\tau)$, выстраиваются по прямой линии, параллельной оптимальной плоскости времени, и проходящей от нее слева на расстоянии λ. Образы правых граничных точек $\overset{\circ}{B}_{ij}''(\tau)$, выстраиваются по прямой, параллельной той же плоскости, и проходящей от нее справа на

расстоянии μ .

Примечания:

17. Условие конечности значений пространственных координат точек (3.5.11), или то же самое точек (2.2.2), существенно для осуществления так преобразований (3.4.1)-(3.4.3), как и последующих преобразований (3.6.1),(3.6.2). Так, например, преобразование (3.6.1) не имеет смысла в случае, когда $\overset{\circ}{a}_{i_1 j_1}'(\tau_1) = -\infty$ при некоторых значениях i_1, j_1 и τ_1. Аналогично, второе преобразование (3.6.2) не проводится, если $\overset{\circ}{b}_{i_2 j_2}'(\tau_2) = \infty$ при некоторых значениях i_2, j_2 и τ_2. В таких случаях процесс слежения только упрощается, поскольку, как это ранее было отмечено, уменьшается общее количество граничных ограничений.

18. Мы уже не раз отмечали, что за исключением описанного в разделе 3.1 частного случая, когда движения выравнивания становились излишними, нельзя использовать преобразованную адаптивную координатную систему с самого начала. В пользу сказанного приведем следующие соображения:

1) В общем случае, изначально построенная преобразованная адаптивная координатная система не в состоянии сохранять структурно неподвижные свойства плоскости времени под влиянием действий движений выравнивания;

2) Теоретически, в общем случае, переход к преобразованной адаптивной координатной системе следует осуществить так, как это описано в разделе 3.4, а именно на базе II адаптивной координатной системы. В противном случае, нам пришлось бы иметь дело лишь только с заведомо ненужными, хотя и более простыми формулами перехода между I координатной системой и преобразованной адаптивной координатной системой.

С практической точки зрения, как мы это уже отметили, можно обойти этот запрет, ограничившись лишь предположением существования II адаптивной координатной системы, и применением напрямую формул преобразований, полученных на ее основе.

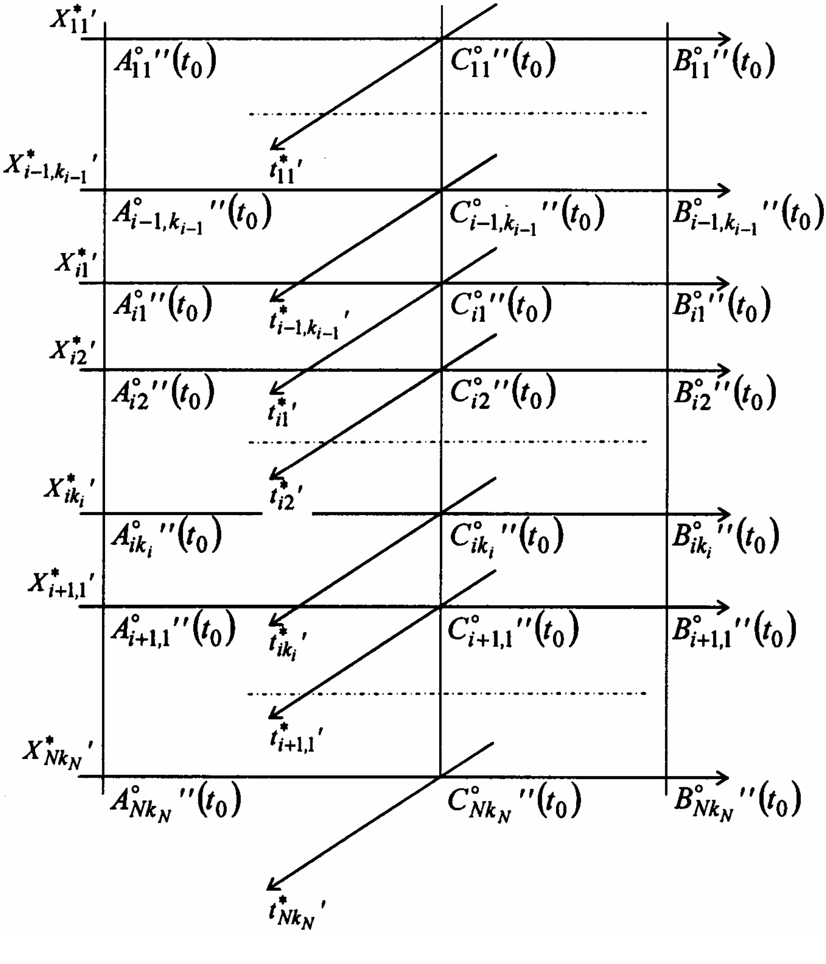


Рис. 11. Изображения образов всех левых и правых граничных точек в начальный момент времени. Преобразованная адаптивная координатная система изображена для случая, когда $\lambda > \mu$.

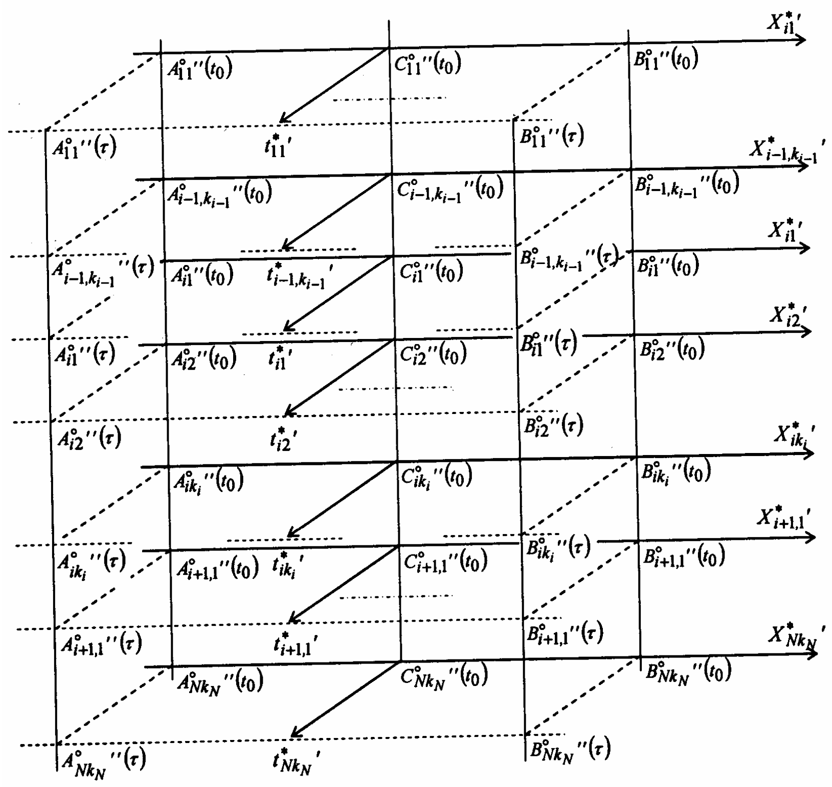


Рис. 12. Изображения точек (3.6.21) в начальный момент времени t_0 и в момент времени $\tau > t_0$ относительно преобразованной адаптивной координатной системы. Из рисунка видно, что τ - несущая плоскость содержит все точки

$$A^{\circ}_{ij}{}''(\tau) = \left|-\lambda,\ \tau\right|_{ij} \quad \text{и} \quad B^{\circ}_{ij}{}''(\tau) = \left|\mu,\ \tau\right|_{ij}\ .$$

ГЛАВА IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ

В этой главе приводится геометрическая версия решения проблемы глобального наблюдения.

Раздел 4.1 предназначен тем, кто пожелал бы пропустить чтение главы III и, вместо этого сразу же перейти исключительно к практическим аспектам реализации решения проблемы. Здесь собраны вместе те понятия и результаты из различных мест книги, которые непосредственно используются в описываемом решении проблемы.

В разделе 4.2 определены понятия граничных и оптимальных вертикалей, а также очерчиваемых ими в пространстве полос плоскости. Эти полосы плоскости служат в качестве пространственных ориентиров, позволяющих фиксировать в пространстве геометрически симметрические и, соответственно, зрительно легко воспринимаемые области, отвечающие недопустимым и оптимальным значениям показаний датчиков.

Ключевое понятие hal-графа, положения вершин которого взаимнооднозначным образом определяются численными показаниями датчиков, введено в разделе 4.3. После реализации преобразований времени (раздел 4.4), hal-граф при слежении может предоставить исчерпывающую информацию обо всех значениях показаний датчиков в удобном для восприятия виде.

В разделе 4.4, за счет реализации некоторых гомеоморфных преобразований времени, удалось обеспечить абсолютную неподвижность в пространстве для граничных и оптимальных вертикалей, а также несущей их плоскости, отвечающих текущим значениям времени. В итоге, для текущих значений времени, отмеченные выше полосы плоскости удается заменять соответствующими отрезками неподвижных прямых линий, что существенно упрощает процедуру наблюдения. Этим сле-

жение в трехмерном пространстве эквивалентно заменяется слежением на плоскости.

Искомое решение проблемы глобального наблюдения, и некоторые детали, связанные с вопросами реализации, описаны в разделе 4.5.

В разделе 4.6 описано представление предлагаемой системы слежения в новом виде, напоминающем по форме обычный циферблат. Возможно, что форма циферблата представить особую ценность для приложений, поскольку в этом случае система слежения воспринимается как компактный по размерам прибор, представляющий понятную и исчерпывающую информацию о текущих показаниях сразу всех многочисленных контролируемых датчиков.

В разделе 4.7 указывается на возможность приложения предлагаемой версии решения проблемы к задачам диагностирования. Так как имеется гомеоморфное соответствие между множеством всевозможных состояний различных диагностируемых объектов и множеством hal-графов (для циферблатного варианта – hal-многоугольников), то в итоге, задача диагностирования сводится к эквивалентной задаче распознавания hal-графов (соответственно hal-многоугольников). Поскольку hal-графы или hal-многоугольники являются геометрическими объектами простой структуры, то тем самым, в некотором смысле устанавливается прямая связь между геометрией и диагностированием.

Возможности приложений предлагаемой системы слежения к задачам диагностики, в схематичной форме обсуждаются на примере медицинской диагностики в разделе 4.8.

4.1. СПИСОК НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Здесь перечисляются те понятия и преобразования из этой книги, на которые нам придется часто ссылаться при описании геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения. Некоторые нужные понятия упоминаются поверхностно, иногда лишь для того, чтобы можно было указать место в книге, где они подробно изложены. Следуя мотивации, приведенной в примечании 18 (стр. 154), ниже мы не упоминаем II адаптивную координатную систему (раздел 3.3), имеющей решающее значение для обоснования законности композиций преобразований (раздел 3.6).

Под названием «I координатная система» подразумевается первая адаптивная координатная система (раздел 1.2), находящаяся в исходном неподвижном положении в евклидовом пространстве R_3. Она определена как совокупность из $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$ параллельных двумерных декартовых координатных плоскостей $X_{ij} \times t_{ij}$, предназначенных для описания наблюдаемых показаний датчиков (раздел 1.1). Каждая плоскость $X_{ij} \times t_{ij}$ рассчитана для фиксации показаний одного датчика: j - го отнесенного к контролируемому объекту i, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Показания датчиков в каждый момент времени слежения $\tau \in T = [t_0, t_1]$ можно охарактеризовать точками, записанными в координатах I координатной системы в следующем виде:

$$A_{ij}(\tau)=\left(a_{ij}(\tau),\tau\right)_{ij},\ B_{ij}(\tau)=\left(b_{ij}(\tau),\tau\right)_{ij},$$
$$C_{ij}(\tau)=\left(c_{ij}(\tau),\tau\right)_{ij},\ H_{ij}(\tau)=\left(i_j(\tau),\tau\right)_{ij}, \qquad (4.1.1)$$

где первые координаты (пространственные координаты (раздел 2.2)) первых трех точек считаются наперед заданными (или установленными в процессе обучения).

Здесь точки $A_{ij}(\tau)$ (левые граничные точки) и $B_{ij}(\tau)$ (правые граничные точки) фиксируют на момент времени τ в пространстве геометрические образы соответственно нижних и верхних пределов допустимых значений j- го датчика отнесенного к объекту i. Наилучшим значениям соответствующих (по времени и индексам) датчиков сопоставляются точки $C_{ij}(\tau)$ (оптимальные точки). Наконец, пространственная координата точки $H_{ij}(\tau)$ (наблюдаемая точка) определяется по наблюдаемому в момент времени τ численному значению показания j- го датчика отнесенного к объекту i.

Между первыми тремя точками из (4.1.1), являющихся попарно сравнимыми (определение 2.3.1), существуют отношения упорядоченности, определяемые следующими отношениями порядка:

$$a_{ij}(\tau)<c_{ij}(\tau)<b_{ij}(\tau)\ \ \forall\tau\in T,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,k_i}. \qquad (4.1.2)$$

Так называемая «преобразованная адаптивная координатная система» (раздел 3.5), определенная в виде совокупности из n параллельных координатных плоскостей $X_{ij}^{*}{}'\times t_{ij}^{*}{}'$, специально создана для корректной реализации предлагаемой версии решения проблемы глобального на-

блюдения. Она неподвижна относительно I координатной системы и по строению отличается от нее геометрическим местоположением в пространстве плоскости времени (раздел 2.1). Плоскость времени преобразованной адаптивной координатной системы названа оптимальной плоскостью времени $Op^*(T)$ (определение 3.4.1), ввиду того, что она совпадает с оптимальной плоскостью $Op(T)$ (определение 2.2.2) и формально может быть получена от плоскости времени I координатной системы соответствующим параллельным ее переносом на постоянную величину $c_{11}(t_0)$.

Однако в подобной интерпретации, кстати, полезной для ее графического представления, эта координатная система почти ничем не отличается от I координатной системы и для нас особой ценности не представляет.

Преобразованная адаптивная координатная система превращается для нас в незаменимый инструмент только в том случае, когда она возникает как итог действий гомеоморфных отображений (раздел 1.3), обеспечивающих наперед заданные симметрические месторасположения в пространстве для образов всех граничных и оптимальных точек (4.1.1).

Для их описания введены следующие обозначения:

Относительно преобразованной адаптивной координатной системы на координатной плоскости $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}$ буквенное обозначение всякой точки, преобразованной упомянутыми выше отображениями, отмечается кружочком с двумя штрихами.

Иногда кружочком с двумя штрихами отмечается также

пространственные координаты этих точек. При этом координаты точки, относительно преобразованной адаптивной координатной системы, записываются с использованием прямых скобок в виде:

$$F_{ij}^{\circ}{''} = F_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| q^{\circ}{''},\, \tau \right|_{ij}. \qquad (4.1.3)$$

Разъяснения к записи (4.1.3) по содержанию не отличаются от разъяснений, приведенных ранее к правилу записи (2.2.1) (стр.72-73). А именно, если в записи (2.2.1) заменим круглые скобки прямыми скобками, а в самих разъяснениях формально произведем соответствующие замены: $t_{ij} \mapsto t_{ij}^{*}{'}$ и $X_{ij} \mapsto X_{ij}^{*}{'}$, то в итоге получим текст разъяснений к правилу записи (4.1.3), которое и учитывается при записи любой точки в координатах преобразованной адаптивной координатной системы.

Граничные, оптимальные и наблюдаемые точки (4.1.1) в координатах преобразованной адаптивной координатной системы записываются соответственно в виде:

$$A_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| a_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij},\ B_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| b_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij},$$

$$C_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| c_{ij}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij},\ H_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| i_{j}^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij}, \qquad (4.1.4)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Точки (4.1.4) являются образами соответствующих точек (4.1.1), и получаются от них действиями гомеоморфных отображений вида (раздел 3.6):

$$\left| x^{\circ}{''}, \tau \right|_{ij} = \left| -\lambda\left(x - c_{ij}(\tau)\right) / \left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau \right|_{ij},\ x \le c_{ij}(\tau), \quad (4.1.5)$$

$$\left| x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij} = \left| \mu\left(x - c_{ij}(\tau)\right) / \left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau \right|_{ij}, \ x \geq c_{ij}(\tau), \quad (4.1.6)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, а λ и μ – наперед заданные (наблюдателем) положительные вещественные числа.

В силу (4.1.2) в формулах (4.1.5) и (4.1.6) случаи деления на нуль исключаются.

Действиями преобразований (4.1.5) и (4.1.6) произвольные две точки $(x_1, \tau)_{ij}$ и $(x_2, \tau)_{ij}$, $x_1 < c_{ij}(\tau)$, $x_2 > c_{ij}(\tau)$, координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ первой координатной системы, гомеоморфным образом отображаются в соответствующие точки $\left| x_1^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}$ и $\left| x_2^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}$ координатной плоскости $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$, преобразованной адаптивной координатной системы.

Пространственные координаты точек (4.1.4) можно определить соответствующими формулами перехода, следующих из (4.1.5),(4.1.6):

$$q^{\circ}{}'' = -\lambda\left(q - c_{ij}(\tau)\right) / \left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \ q \leq c_{ij}(\tau), \quad (4.1.7)$$

$$q^{\circ}{}'' = \mu\left(q - c_{ij}(\tau)\right) / \left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \quad q \geq c_{ij}(\tau), \quad (4.1.8)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Учитывая (с соблюдением соответствий по значениям индексов и времени) пространственные координаты первых трех точек из (4.1.1) в формулах перехода (4.1.7), (4.1.8), имеем

$$a_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = -\lambda, \ b_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = \mu, \ c_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = 0, \qquad (4.1.9)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Итак, в общем случае в соответствии с (4.1.9), после действия отображений (4.1.5) и (4.1.6), изначально произвольно различающиеся пространственные координаты всех граничных и оптимальных точек из (4.1.1) удается описать в упрощенном виде, т.е. всего тремя постоянными численными значениями: $-\lambda$, 0 и μ, причем в течение всего времени наблюдения T.

Поэтому соответствующие образы отображений (4.1.4) можно представить в виде:

$$A_{ij}^{\circ}''(\tau) = \left|-\lambda, \tau\right|_{ij},\ B_{ij}^{\circ}''(\tau) = \left|\mu, \tau\right|_{ij},\ C_{ij}^{\circ}''(\tau) = \left|0, \tau\right|_{ij} \quad (4.1.10)$$

для любых значений времени и индексов.

Из (4.1.9) вытекают следующие отношения порядка

$$a_{ij}^{\circ}''(\tau) < c_{ij}^{\circ}''(\tau) < b_{ij}^{\circ}''(\tau), \quad (4.1.11)$$

и неравенства

$$a_{ij}^{\circ}''(\tau) < 0,\ b_{ij}^{\circ}''(\tau) > 0, \quad (4.1.12)$$

справедливые для любых значений времени и индексов.

Неравенства (4.1.11) означают, что отношения (4.1.2) являются инвариантами преобразований (4.1.5) и (4.1.6).

Имеет место более сильное утверждение:

Отношения порядка между пространственными координатами для произвольных двух попарно сравнимых точек в I координатной системе являются инвариантами преобразований (4.1.5) и (4.1.6).

Справедливость этого утверждения следует из того, что обе линейные непрерывные зависимости (4.1.7) и (4.1.8)

вместе определяют одну непрерывную строго монотонно возрастающую функцию $q^{\circ}{}'' = q^{\circ}{}''(q)$ на всей области определения $q \in (-\infty, \infty)$ при любых фиксированных допустимых значениях индексов i, j, времени τ и параметров λ, μ. Теперь, с учетом преобразований (4.1.5),(4.1.6), можем утверждать, что вне зависимости от конкретных значений индексов и времени, всевозможные точки из интервалов

$$(x, \tau)_{ij} \in X_{ij} \times t_{ij} \quad \forall x \in I_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau)),$$

имеют при преобразованиях образы: $\left| x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij} \in X^{*}_{ij}{}' \times t^{*}_{ij}{}'$, пространственные координаты которых без пропусков заполняют интервал $x^{\circ}{}'' \in (-\lambda, \mu)$, определенный в преобразованной адаптивной координатной системе, или, то же самое, интервал $x^{\circ}{}'' \in (c_{11}(t_0) - \lambda,\ c_{11}(t_0) + \mu)$, определенный в I координатной системе.

Верно и обратное утверждение, причем обратные к (4.1.5) и (4.1.6) отображения определяются следующими формулами соответственно:

$$|x, \tau|_{ij} = \left| c_{ij}(\tau) - \frac{1}{\lambda}\big(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\big)x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}, \quad x^{\circ}{}'' \le 0, \quad (4.1.13)$$

$$|x, \tau|_{ij} = \left| c_{ij}(\tau) + \frac{1}{\mu}\big(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\big)x^{\circ}{}'', \tau \right|_{ij}, \quad x^{\circ}{}'' \ge 0. \quad (4.1.14)$$

Из (4.1.13),(4.1.14) вытекают обратные формулы перехода для пространственных координат. Они позволяют по пространственным координатам образов точек в преобра-

зованной адаптивной координатной системе найти пространственные координаты их прообразов в I координатной системе:

$$q = c_{ij}(\tau) - \frac{1}{\lambda}\left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right)q^{\circ\prime\prime},\ q^{\circ\prime\prime} \le 0, \qquad (4.1.15)$$

$$q = c_{ij}(\tau) + \frac{1}{\mu}\left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right)q^{\circ\prime\prime},\ q^{\circ\prime\prime} \ge 0, \qquad (4.1.16)$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Следует отметить, что обе линейные непрерывные зависимости (4.1.15) и (4.1.16) вместе определяют одну непрерывную строго монотонно возрастающую функцию $q = q\left(q^{\circ\prime\prime}\right)$ на всей области определения $q^{\circ\prime\prime} \in (-\infty, \infty)$ при любых фиксированных допустимых значениях индексов i, j, времени τ и параметров λ, μ.

Описанные закономерности выражены в приводимых ниже свойствах:

Свойство 1. *Действиями отображений (4.1.5), (4.1.6), в общем случае изначально произвольно различающиеся пространственные координаты всех граничных и оптимальных точек удается описать всего тремя постоянными численными значениями, причем в течение всего времени наблюдения T;*

Свойство 2. *Отношения порядка между пространственными координатами для произвольных двух попарно сравнимых точек в I координатной системе, являются инвариантами отображений (4.1.5),(4.1.6);*

Свойство 3. *Интервалы, состоящие из попарно сравнимых точек в I координатной системе, действиями пре-*

образований (4.1.5),(4.1.6) отображаются в интервалы, состоящие из соответствующих (по значениям индексов и времени) попарно сравнимых точек в преобразованной адаптивной координатной системе. Верно и обратное утверждение (устанавливаемое на основе отображений (4.1.13),(4.1.14)).

Каждое численное текущее показание всякого нормально установленного и исправного датчика несет в себе, конечно же, определенную адекватную информацию о наблюдаемом объекте или процессе. Имея в виду это, мы теперь можем утверждать, что при переходе формулами (4.1.7),(4.1.8) от пространственных координат точек в I координатной системе к пространственным координатам соответствующих точек в преобразованной адаптивной координатной системе, потери информации (связанной с показаниями датчиков) исключаются. Верно и обратное утверждение, а именно в случае применения обратных формул перехода (4.1.15),(4.1.16) потери информации также исключаются.

Следствие 1. *Образы*

$$A_{ij}^{\circ}{''}(\tau)=\left|-\lambda,\,\tau\right|_{ij} \;\; и \;\; B_{ij}^{\circ}{''}(\tau)=\left|\mu,\,\tau\right|_{ij}$$

отображений (4.1.7)и (4.1.8), отвечающие соответствующим левым и правым граничным точкам

$$A_{ij}(\tau)=\left(a_{ij}(\tau),\,\tau\right)_{ij} \;\; и \;\; B_{ij}(\tau)=\left(b_{ij}(\tau),\,\tau\right)_{ij}$$

в I координатной системе, всегда без исключений будут выполнять функции соответствующих (по значениям индексов и времени) левых и правых граничных точек в преобразованной адаптивной координатной системе;

Следствие 2. *Образы* $C_{ij}^{\circ}''(\tau)=\left|0,\tau\right|_{ij}$, *оптимальных точек* $C_{ij}(\tau)=\left(c_{ij}(\tau),\tau\right)_{ij}$ *из I адаптивной координатной системы, естественным образом будут осуществлять функции соответствующих (по значениям индексов и времени) оптимальных точек в преобразованной адаптивной координатной системе;*

Следствие 3. *В каждый момент времени* $\tau\in T$ *односвязный интервал допустимых значений показаний датчиков* $I_{ij}(\tau)=\left(a_{ij}(\tau),b_{ij}(\tau)\right)$, *определенный на пересечении* τ *- несущей плоскости* (определение 3.3.1) *с координатной плоскостью* $X_{ij}\times t_{ij}$, *I координатной системы гомеоморфно отображается в односвязный интервал* $(-\lambda,\mu)$, *определенный на пересечении* τ *- несущей плоскости с координатной плоскостью* $X_{ij}^{*}{}'\times t_{ij}^{*}{}'$, *преобразованной адаптивной координатной системы.*

Следствия 1-2 обосновывают корректность приводимых в следующем разделе определений, в которых введены симметрические объекты, нужные как статические геометрические ориентиры в процессе осуществления слежения. Дополнительно о следствии 3 и свойстве 2, см. примечание 19.

Примечание 19:

Благодаря свойству 2, а также следствию 3, связь между точками $H_{ij}(\tau)=\left(i_j(\tau),\tau\right)_{ij}$ и их образами $H_{ij}^{\circ}''(\tau)=\left|i_j^{\circ}''(\tau),\tau\right|_{ij}$ можно

кратко охарактеризовать следующими двумя фундаментальными для описываемого процесса слежения положениями:

1. Отношение порядка $i_j(\tau) < \tilde{i}_j(\tau)$ является инвариантом отображений (4.1.7),(4.1.8), т.е. имеет место неравенство $i_j^{\circ}{}''(\tau) < \tilde{i}_j^{\circ}{}''(\tau)$, где значения $i_j^{\circ}{}''(\tau)$ и $\tilde{i}_j^{\circ}{}''(\tau)$ - соответствующие образы произвольных значений $i_j(\tau)$ и $\tilde{i}_j(\tau)$;

2. Включение $i_j(\tau) \in I_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau))$ имеет место тогда и только тогда, когда $i_j^{\circ}{}''(\tau) \in (-\lambda, \mu)$, где значение $i_j^{\circ}{}''(\tau)$ является образом произвольного наблюдаемого значения $i_j(\tau)$ при действии отображений (4.1.7),(4.1.8), $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

4.2. ГРАНИЧНЫЕ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕРТИКАЛИ. ПОЛОСЫ

Ниже для индексов полагаем, что $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Определение 4.2.1. *Точки* $A_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = \left|-\lambda, \tau\right|_{ij}$ *назовем левыми граничными точками, соответственно точек* $B_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = \left|\mu, \tau\right|_{ij}$ *будем называть правыми граничными точками на координатной плоскости* $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$, *преобразованной адаптивной координатной системы,* $\tau \in T$.

Определение 4.2.2. *Точки* $C_{ij}^{\circ}{}''(\tau) = \left|0, \tau\right|_{ij}$ *назовем оптимальными точками координатной плоскости* $X_{ij}^{*}{}' \times t_{ij}^{*}{}'$, *преобразованной адаптивной координатной системы.*

Левые граничные точки $A_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left|-\lambda, \tau\right|_{ij}$, вне зависимости от значений индексов и времени, удалены на одинаковую величину λ от оптимальной плоскости времени $Op^{*}(T)$, и расположены по левую сторону от нее. Соответственно правые граничные точки $B_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left|\mu, \tau\right|_{ij}$, также вне зависимости от значений индексов и времени, удалены на одинаковую величину μ от оптимальной плоскости времени, и находятся по правую сторону от нее. Следовательно, все левые и правые граничные точки, расположенные на τ- несущей плоскости оказываются выстроенными соответственно по двум вертикальным линиям, параллельными τ- оптимальной вертикали $Op(\tau)$ (определение 2.2.1).

Определение 4.2.3. *Зафиксируем любое значение времени* $\tau \in T$ *и, рассматривая все левые граничные точки* $A_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left|-\lambda, \tau\right|_{ij}$ *в качестве вершин графа, соединим неориентированными прямолинейными ребрами каждые две из них, находящихся на ближайших по расположению координатных плоскостях* $X_{ij}^{*}{'} \times t_{ij}^{*}{'}$, *преобразованной адаптивной координатной системы. Полученный граф назовем левой граничной вертикалью допустимых значений и обозначим символом* $GA^{\circ}(\tau)$.

Очевидно, что для построения левой граничной вертикали $GA^{\circ}(\tau)$, достаточно будет соединить отрезком прямой две крайние левые граничные точки:

$$A^{\circ}_{11}''(\tau)=\left|-\lambda,\,\tau\right|_{11} \text{ и } A^{\circ}_{Nk_N}''(\tau)=\left|-\lambda,\,\tau\right|_{Nk_N},$$

расположенные на τ - несущей плоскости.

Определение 4.2.4. *Зафиксируем любое значение времени* $\tau \in T$ *и, рассматривая все правые граничные точки* $B^{\circ}_{ij}''(\tau)=\left|\mu,\,\tau\right|_{ij}$ *в качестве вершин графа, соединим неориентированными прямолинейными ребрами каждые две из них, находящихся на ближайших по расположению координатных плоскостях* $X^*_{ij}{}'\times t^*_{ij}{}'$. *Полученный граф назовем правой граничной вертикалью допустимых значений и обозначим символом* $GB^{\circ}(\tau)$.

Также как в предыдущем случае, для построения правой граничной вертикали $GB^{\circ}(\tau)$, достаточно будет соединить отрезком прямой две крайние правые граничные точки $B^{\circ}_{11}''(\tau)=\left|\mu,\,\tau\right|_{11}$ и $B^{\circ}_{Nk_N}''(\tau)=\left|\mu,\,\tau\right|_{Nk_N}$, расположенные на τ - несущей плоскости.

Все оптимальные точки $C^{\circ}_{ij}''(\tau)=\left|0,\,\tau\right|_{ij}$, вне зависимости от значений индексов и времени, расположены на оптимальной плоскости времени $Op^*(T)$.

Определение 4.2.5. *Зафиксируем любое значение времени* $\tau \in T$ *и, рассматривая в преобразованной адаптивной координатной системе все оптимальные точки* $C^{\circ}_{ij}''(\tau)=\left|0,\,\tau\right|_{ij}$ *в качестве вершин графа, соединим неориентированными прямолинейными ребрами каждые две из них, находящихся на ближайших по расположению коорди-*

натных плоскостях $X_{ij}^{*}{}'\times t_{ij}^{*}{}'$.

Полученный таким путем граф назовем укороченной оптимальной вертикалью, или более кратко, *оптимальной вертикалью* допустимых значений в тех случаях, когда недоразумения, в связи с употреблением такого же термина в определении 2.2.1, исключаются, и обозначим его символом $Op^{\circ}(\tau)$.

Геометрически, оптимальная вертикаль $Op^{\circ}(\tau)$ совпадает с той частью τ - оптимальной вертикали $Op(\tau)$, которая заключена между двумя крайними координатными плоскостями $X_{11}^{*}{}'\times t_{11}^{*}{}'$ и $X_{Nk_N}^{*}{}'\times t_{Nk_N}^{*}{}'$, преобразованной адаптивной координатной системы.

В дальнейшем название «оптимальная вертикаль» будем использовать только в отношении отрезка $Op^{\circ}(\tau)$, отказавшись тем самым от сокращенной версии названия прямой $Op(\tau)$.

Таким образом, для построения оптимальной вертикали $Op^{\circ}(\tau)$, достаточно будет соединить отрезком прямой две крайние оптимальные точки

$$C_{11}^{\circ}{}''(\tau)=|0,\,\tau|_{11} \text{ и } C_{Nk_N}^{\circ}{}''(\tau)=|0,\,\tau|_{Nk_N},$$

расположенные на τ - несущей плоскости.

Очевидно, что граничные вертикали $GA^{\circ}(\tau), GB^{\circ}(\tau)$ и оптимальная вертикаль $Op^{\circ}(\tau)$ неподвижны относительно τ - несущей плоскости при любом $\tau\in T$.

Из описанных построений следует, что длины гранич-

ных вертикалей и оптимальной вертикали одинаковы при всяком фиксированном значении времени и равны расстоянию между координатными осями $X_{11}^{*}{}'$ и $X_{Nk_N}^{*}{}'$. Поэтому граничные вертикали и оптимальная вертикаль по ходу времени описывают в пространстве одинаковые по размерам полосы плоскости в форме прямоугольника.

Введем обозначение: $T_t = [t_0, t]$, – откуда, в частности следует, что $T_{t_1} = [t_0, t_1] = T$.

Определение 4.2.6. *Полосу плоскости, описанную в пространстве R_3 в течение времени $\tau \in T_t$ левой граничной вертикалью $GA^{\circ}(\tau)$, назовем левой граничной t - полосой и обозначим символом $GA^{\circ}(T_t)$, $t \in T$.*

Определение 4.2.7. *Полосу плоскости, описанную в пространстве R_3 в течение времени $\tau \in T_t$ правой граничной вертикалью $GB^{\circ}(\tau)$, назовем правой граничной t - полосой и обозначим символом $GB^{\circ}(T_t)$, $t \in T$.*

Определение 4.2.8. *Полосу плоскости, описанную в пространстве R_3 в течение времени $\tau \in T_t$ оптимальной вертикалью $Op^{\circ}(\tau)$, назовем оптимальной t - полосой и обозначим символом $Op^{\circ}(T_t)$, $t \in T$.*

Следует иметь в виду то, что оптимальная t_1 - полоса $Op^{\circ}(T)$ – прямоугольник и, несмотря сходства обозначений, является лишь конечной частью оптимальной плоскости времени $Op^{*}(T)$, являющееся координатной плоско-

стью преобразованной адаптивной координатной системы.

Все три t - полосы параллельны между собой и, кроме того, граничные t - полосы $GA^{\circ}(T_t)$ и $GB^{\circ}(T_t)$ удалены от t - полосы $Op^{\circ}(T_t)$ на расстояния λ и μ в противоположных направлениях, указанных в их полных названиях.

Каждая t - полоса при начальном значении времени «превращается» в соответствующую одноименную вертикаль, а именно справедливы равенства:

$$GA^{\circ}\left(T_{t_0}\right)=GA^{\circ}(t_0),\ GB^{\circ}\left(T_{t_0}\right)=GB^{\circ}(t_0),$$
$$Op^{\circ}\left(T_{t_0}\right)=Op^{\circ}(t_0). \tag{4.2.1}$$

Мы завершили описания геометрических объектов, играющих статические роли неподвижных ориентиров в процессе слежения.

4.3. HAL-ГРАФ. HAL-ПОВЕРХНОСТЬ

В отличие от предыдущего раздела, здесь рассматривается подвижный в общем случае геометрический объект, взаимнооднозначно определяемый показаниями датчиков.

Определение 4.3.1. *Зафиксируем произвольное значение времени слежения $\tau \in T$ и, рассматривая в преобразованной адаптивной координатной системе все наблюдаемые точки*

$$H_{ij}^{\circ}{}''(\tau)=\left|\, i_j^{\circ}{}''(\tau),\tau \right|_{ij}$$

в качестве вершин графа, соединим неориентированными прямолинейными ребрами каждые две из них, находя-

щихся на ближайших по расположению координатных плоскостях $X_{ij}^{*}{}'\times t_{ij}^{*}{}'$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$. *Полученный граф назовем hal-графом, соответствующим моменту времени* τ *и обозначим символом* $GH^{\circ}(\tau)$.

В примечании 20 дано объяснение происхождению термина «hal-граф».

Из определения 4.3.1 ясно, что hal-граф $GH^{\circ}(\tau)$ в каждый момент времени $\tau\in T_t$ геометрическими местоположениями своих вершин, относительно соответствующих вершин оптимальной вертикали и граничных вертикалей (являющихся, по сути, тоже графами), предоставляет информацию одновременно обо всех реальных значениях показаний датчиков на этот момент времени.

Стало быть, можно утверждать, что hal-граф позволяет оценить фактические состояния всей совокупности наблюдаемых объектов в течение всего процесса наблюдения (важные детали этой, только, что сказанной мысли приведены в разделе 4.5).

Определение 4.3.2. *Соответствующий текущему значению времени* $\tau\in T$ *hal-граф* $GH^{\circ}(\tau)$, *будем называть текущим hal-графом.*

Очевидно, hal-граф $GH^{\circ}(\tau)$ по ходу времени $\tau\in T_t$ опишет в пространстве поверхность, заключенную между координатными плоскостями $X_{11}^{*}{}'\times t_{11}^{*}{}'$ и $X_{Nk_N}^{*}{}'\times t_{Nk_N}^{*}{}'$.

Определение 4.3.3. *Поверхность, описываемую hal-графом в пространстве* R_3 *в течение времени* $\tau\in T_t$ *бу-*

дем называть t *- hal-поверхностью и обозначать символом* $GH^{\circ}(T_t)$, $t \in T$.

Очевидно, что $GH^{\circ}\left(T_{t_0}\right) = GH^{\circ}(t_0)$ (см. примечание 21).

В преобразованной адаптивной координатной системе в каждый момент времени τ определенные выше три вертикали $GA^{\circ}(\tau)$, $GB^{\circ}(\tau)$, $Op^{\circ}(\tau)$ и hal-граф $GH^{\circ}(\tau)$ располагаются на τ - несущей плоскости. В силу постоянства значений пространственных координат своих вершин, вертикали (графы) $GA^{\circ}(\tau)$, $GB^{\circ}(\tau)$, $Op^{\circ}(\tau)$ на каждой τ - несущей плоскости имеют статически фиксированные положения, представляя собою одинаковые по длине отрезки, соответственно трех параллельных вертикальных прямых.

Несмотря на то, что граничные вертикали $GA^{\circ}(\tau)$, $GB^{\circ}(\tau)$ и оптимальная вертикаль $Op^{\circ}(\tau)$ неподвижны относительно τ - несущей плоскости, сама τ - несущая плоскость подвижна и, по определению, удаляется от несущей плоскости по формуле $\tau - t_0$, испытывая с ходом времени параллельные переносы в положительном направлении ориентации осей времени.

Очевидно, что процедура наблюдения может сильно упроститься при абсолютной неподвижности (относительно I координатной системы) текущих τ - несущих плоскостей. Так что, в целях обеспечения абсолютной неподвижности для вертикалей $GA^{\circ}(\tau)$, $GB^{\circ}(\tau)$ и $Op^{\circ}(\tau)$, соответствующим текущим значениям времени, нам следует добиться неподвижности для каждой текущей τ - несущей

плоскости. Очевидно, для того чтобы обойтись без потерь информации, нам следует сделать это только и только посредством взаимнооднозначных преобразований.

Так мы приходим к необходимости рассмотрения преобразований времени. Они подробно описаны в следующем разделе. После этого, мы будем готовы к изложению полной версии предлагаемого геометрического решения проблемы слежения.

Примечания:

20. Слово «hal» с азербайджанского языка переводится как «состояние» (и произносится с озвучиванием, соответствующим чтению этого слова вслух на латыни). Использование этого азербайджанского слова в качестве приставки, помимо его очевидной лаконичности, оправдано в основном тем, что на статичном фоне прочих геометрических объектов, изображаемых в преобразованной адаптивной координатной системе, именно динамически подвижный граф, определяемый пространственными координатами своих наблюдаемых вершин, оказывается ключевым источником информации о текущих реальных состояниях всех наблюдаемых объектов.

21. Здесь, быть может, уместно отметить следующее несколько необычное сходство, существующее между понятием hal-графа и с одним общеизвестным классическим приемом, давно и успешно применяемым в целях аппроксимации в теории приближений.

Так, с одной стороны, известно, что например, при приближенном интегрировании одномерной непрерывной функции иногда ее траекторию аппроксимируют ломаной линией с вершинами на этой же траектории, а с другой стороны, hal-граф по строению и есть ломаная линия, описывающая по ходу времени hal-поверхность в трехмерном пространстве.

Удивительно, что в принципе hal-поверхность можно рассматривать не как приближение, а в качестве своеобразной точной

«корпоративной аппроксимации» для всякой n- мерной векторной функции с компонентами, состоящими из произвольно заданных n непрерывных одномерных функций, зависящих от одного аргумента (времени). Существование этого факта предопределяется особенностями конструкций адаптивных координатных систем, способом описания функций в них, определениями 4.3.1, 4.3.2 и, наконец, теоремой 1.3.2.

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ

Напомним, что в разделе 1.2 выбор общей единицы измерения для временных координатных осей, в конечном итоге, сводилось к тому, что все координатные оси времени I координатной системы имели одинаковые так по длине, как и по физической размерности единицы измерения. Временная координата всякой точки имело одно и то же численное значение так в I координатной системе, как и в преобразованной адаптивной координатной системе. Поскольку до сих пор рассматриваемые все преобразования касались лишь пространственных координат точек, и этим обеспечивалась инвариантность временных координат относительно рассматриваемых преобразований.

Следовательно, общая единица измерения времени в преобразованной адаптивной координатной системе не отличается (по длине и физической размерности) от соответствующей общей единицы измерения времени I координатной системы.

За счет наличия потенциальной возможности для проведения пока еще неопределенных обратимых преобразований временных координат, у нас остались некоторые резервы для осуществления дальнейших упрощений проце-

дуры слежения (см. примечание 22).

С этой целью мы постараемся обеспечить абсолютную неподвижность для вертикалей $GA^{\circ}(\tau)$, $GB^{\circ}(\tau)$, $Op^{\circ}(\tau)$ и τ - несущей плоскости на изображениях преобразованной адаптивной координатной системы.

Эти преобразования, конечно, окажут ограничивающее воздействие и на движения текущего hal-графа ввиду того, что он полностью располагается на соответствующей текущей несущей плоскости. Как мы увидим ниже, всякие движения hal-графов $GH^{\circ}(\cdot)$ в направлении, например, положительной ориентации временных осей будут невозможными.

Выше повсюду мы общее для всех временных координатных осей значения времени обозначали одним символом. Это было возможно благодаря тому, что с координатно-измерительной точки зрения, мы относились ко всем координатным осям времени как к копиям одной координатной оси времени.

Стало быть, для достижения цели нам достаточно будет ограничиться одним подходящим обратимым преобразованием времени, синхронно реализуемым на всех координатных осях времени преобразованной адаптивной координатной системы.

Нужное преобразование времени мы построим исходя из перспективы достижения следующих двух условий:

1. В каждый текущий момент времени t, преобразованием времени текущая t- несущая плоскость, занимая геометрическое место исходно неподвижной несущей плоско-

сти (или, то же самое, t_0- несущей плоскости) в преобразованной адаптивной координатной системе, должна стать абсолютно неподвижной;

2. Чем больше уменьшаются (возрастают) значения времени τ в пределах отрезка T_t, тем больше t_0- несущая плоскость, превратившаяся преобразованием времени в подвижную τ - несущую плоскость, должна удалиться (приблизиться) от (к) ставшей абсолютно неподвижной текущей t- несущей плоскости, совершая при этом параллельные переносы в отрицательном направлении ориентации осей времени.

Очевидно, что для адресного расположения абсолютно неподвижной текущей t- несущей плоскости, условием 1, по сути, конкретизируется выбор всего лишь одной из бесконечного числа пригодных для этого геометрических плоскостей пространства.

По достижению первого условия, второе условие, с одной стороны, позволяет наблюдателю ввиду «удержаний со сдвигом» на дисплее прошедших изображений hal-графа проследить за динамикой изменения показаний датчиков, а с другой стороны, устраняет затеняющие эффекты τ - полос и τ - hal-поверхности для текущей t- несущей плоскости. В каждый текущий момент времени t последним обеспечивается нормальная видимость для вертикалей $GA^{\circ}(t)$, $GB^{\circ}(t)$, $Op^{\circ}(t)$ и hal-графа $GH^{\circ}(t)$, всецело расположенных на ставшей абсолютно неподвижной текущей t-несущей плоскости.

Таким образом, под воздействием подходящего обрати-

мого преобразования времени, подвижная текущая t- несущая плоскость должна занимать геометрическое место исходно неподвижной t_0- несущей плоскости, а сама t_0- несущая плоскость становится подвижной (см. примечание 23).

Поскольку в условиях 1 и 2 использованы текущие и произвольные значения времени, то сама возможность описания нужного преобразования времени диктует нам потребность различения обозначений для этих моментов времени. Из следующих, использованных ранее (в разделе 4.2) обозначений:

$$\tau \in T_t = [t_0, t], \; t \in T_{t_1} = T = [t_0, t_1],$$

несложно усмотреть, что текущее значение времени удобно обозначать символом «t», а символ «τ» употреблять, как и прежде, в качестве переменного времени, т.е. так для обозначения прошедших моментов времени:

$$t_0 \le \tau < t,$$

как и для обозначения самого текущего момента времени:

$$\tau = t.$$

Рассмотрим следующие преобразования сдвига для временных координат точек в преобразованной адаптивной координатной системе:

$$\tau' = \tau + t_0 - t, \tag{4.4.1}$$

где t_0– начальное значение времени, $t \in T$ – текущее значение времени, $\tau \in T_t$ – переменная времени и τ'– преобразованная переменная времени.

Введем обозначение: $T_t' = [2t_0 - t, t_0]$.

Очевидно, что длины отрезков времени T_t и T'_t одинаковые и равны $t - t_0$.

В каждый фиксированный текущий момент времени $t \in T$ всякому значению переменной времени $\tau \in T_t$ преобразованием (4.4.1) взаимнооднозначным образом сопоставляется только одно значение $\tau' \in T'_t$.

Из (4.4.1) имеем $\tau' \le t_0$. Для нахождения промежутка времени между моментами времени t_0 и τ' поступим следующим образом. Представив (4.4.1) в эквивалентной записи $t - \tau = t_0 - \tau'$ заключаем, что удаление (по времени) каждого фиксированного текущего значения времени t от произвольной переменной времени τ, всегда одинаково с удалением начального значения времени t_0 от соответствующей преобразованной переменной времени τ'.

При равенстве $t = t_0$ из условия $\tau \in T_{t_0}$ имеем, что $\tau = t_0$. С учетом этих равенств из (4.4.1) получим $t'_0 = t_0$, а при соотношениях $\tau = t > t_0$ из (4.4.1) непосредственно следует, что $t' = t_0$.

Так что во всякий текущий момент времени $t \in T$ текущая t- несущая плоскость, трансформированная в текущую t'- несущую плоскость преобразованием времени (4.4.1), заведомо займет геометрическое место t_0- несущей плоскости и, стало быть, станет абсолютно неподвижной относительно преобразованной адаптивной координатной системы. Тем самым, преобразование (4.4.1)

удовлетворяет условию 1. Проверка справедливости условия 2 еще проще.

Благодаря соблюдению этих условий, изображения текущих t'- несущих плоскостей всегда абсолютно неподвижны и размещаются на переднем плане, а изображения прочих τ' - несущих плоскостей, соответствующих уже прошедшим моментам времени τ, располагаются на заднем плане со следующим упорядочением:

τ'- несущие плоскости, соответствующие к недавно прошедшим моментам времени τ, всегда располагаются ближе к текущей t'- несущей плоскости, чем τ'- несущие плоскости, отвечающие к более поздним прошедшим моментам времени.

Образно говоря, картины реального наблюдения, отвечающие прошедшим моментам времени, пропорционально с течением времени «уплывают вдаль» от текущей t'- несущей плоскости без нарушения упорядоченности во взаимных расположениях, и в строго отрицательном направлении ориентации осей времени. Тем самым, полностью устраняются всевозможные затеняющие эффекты τ' - полос и τ' - hal-поверхности для текущей t'- несущей плоскости.

Обратное преобразование для временных координат, очевидно, примет следующий вид

$$\tau = \tau' + t - t_0 . \tag{4.4.2}$$

где $\tau' \in T_t'$, и все символы времени без штриха определены также как в (4.4.1).

В каждый фиксированный текущий момент времени $t \in T$ всякому значению преобразованной переменной вре-

мени $\tau' \in T_t'$ обратным преобразованием (4.4.2) взаимнооднозначным образом сопоставляется только одно значение $\tau \in T_t$.

Обе преобразования (4.4.1) и (4.4.2) являются непрерывными преобразованиями сдвига времени соответственно в отрицательном: $t_0 - t \le 0$, и в положительном: $t - t_0 \ge 0$, направлениях ориентации осей времени.

Следовательно, преобразование времени (4.4.1) для каждого фиксированного текущего момента времени $t \in T$ определяет гомеоморфное отображение.

Инвариантность временных координат точек относительно преобразований пространственных координат, позволяет без затруднений учитывать в соответствующих определениях и формулах преобразований, как прямое преобразование времени, так и обратное преобразование времени. Фактически, в каждом рассматриваемом случае учет прямого преобразования (4.4.1) сводится к осуществлению замен соответственно переменной времени ($\tau \mapsto \tau'$), текущего значения времени ($t \mapsto t'$), и отрезка времени ($T_t \mapsto T_t'$).

Итак, в преобразованной адаптивной координатной системе в каждый текущий момент времени $t \in T$ текущая t-несущая плоскость гомеоморфизмом (4.4.1) трансформируется в текущую t'- несущую плоскость, являющейся носителем для вертикалей $GA^\circ(t')$, $GB^\circ(t')$, $Op^\circ(t')$ и hal-графа $GH^\circ(t')$.

В результате, все текущие картины наблюдения разво-

рачиваются на одной неподвижной плоскости, расположенной на месте исходной несущей плоскости. Говоря конкретно, все три вертикали $GA^{\circ}(t')$, $GB^{\circ}(t')$, $Op^{\circ}(t')$, отвечающие текущим значениям времени и неподвижные относительно t'- несущей плоскости, превращаются в абсолютно неподвижных трех параллельных отрезков. Они выполняют функции абсолютно неподвижных геометрических ориентиров для оценки пространственных месторасположений вершин текущих hal-графов.

Картины наблюдения, отвечающие прошедшим моментам времени, пропорционально течению времени удаляются от текущей t'- несущей плоскости в отрицательном направлении ориентации осей времени. Это, с одной стороны, позволяет наблюдателю путем сравнений картины наблюдения переднего плана с картинами наблюдения заднего плана проследить за эволюциями (динамикой изменения) положений вершин hal-графов, а с другой стороны, полностью избавляет текущие картины наблюдения от заслоняющих влияний трех τ' - полос и одной τ' - hal-поверхности, определенных соответственно в предыдущих двух разделах.

Для того чтобы не допустить чрезмерной загрузки экрана и обойтись без серьезных усложнений обшей геометрической картины наблюдения, имеет смысл отобразить не все прошлые картины наблюдения, т.е. не все те картины наблюдения, которые отвечают прошедшим моментам времени.

Эта задача решена в разделе 4.5, на основе введения новых двух параметров.

Примечания:

22. Не вдаваясь в подробности, отметим, что понятие адаптивной координатной системы включает в себе не используемые нами в данной книге дополнительные резервы для проведения упрощающих процесс наблюдения преобразований времени в случаях, когда не только единицы времени, но и даже течения времени на разных координатных осях времени могут быть неодинаковыми.

23. Идея о том, что при изначальном обратном выборе ориентации временных осей адаптивных координатных систем, преобразования времени окажутся излишними, не состоятельна. Ибо в этом случае τ - несущая плоскость также подвижна, и будет удаляться от несущей плоскости, испытывая с ходом времени параллельные переносы, на этот раз в отрицательном направлении ориентации осей времени.

4.5. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЛОБАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Если бы мы решили провести наблюдение, используя только I координатную систему, то нам потребовалось бы следить за изменениями пространственных расположений всех четырех типов точек (4.1.1), которые вместе характеризуют весь объем имеющейся и поступающей в текущем режиме информации от n датчиков разного назначения. Однако после описанного в III главе перехода от подвижной II координатной системы к неподвижной преобразованной адаптивной координатной системе, ситуация коренным образом меняется.

Согласно формулам (4.1.10) (обеспечивающим свойство статичности для определенных в разделе 4.2 геометриче-

ским симметрическим объектам), *для процесса слежения подлинный интерес представляют поведения только одного типа точек в преобразованной адаптивной координатной системе, а именно точек вида*

$$H_{ij}^{\circ}{''}(\tau) = \left| i_j^{\circ}{''}(\tau), \tau \right|_{ij},$$

являющихся вершинами целостной геометрической структуры – hal-графа. В свою очередь, эти вершины – образы фиксируемых в I координатной системе соответствующих (по индексам и времени) наблюдаемых точек

$$H_{ij}(\tau) = \left(i_j(\tau), \tau\right)_{ij},$$

где $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Образы таких точек при отображениях (4.1.5),(4.1.6) и, с учетом преобразований времени (4.4.1), можно определить следующими соотношениями:

$$\left| i_j^{\circ}{''}(\tau), \tau' \right|_{ij} = \left| -\lambda \left(i_j(\tau) - c_{ij}(\tau)\right) / \left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau' \right|_{ij}, \quad (4.5.1)$$

при $i_j(\tau) \le c_{ij}(\tau)$, и

$$\left| i_j^{\circ}{''}(\tau), \tau' \right|_{ij} = \left| \mu \left(i_j(\tau) - c_{ij}(\tau)\right) / \left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right), \tau' \right|_{ij}, \quad (4.5.2)$$

при $i_j(\tau) \ge c_{ij}(\tau)$.

Здесь t_0 – начальное значение времени, $t \in T = [t_0, t_1]$ – текущее значение времени, $\tau \in T_t = [t_0, t]$ – переменная времени и $\tau' \in T_t' = [2t_0 - t, t_0]$ – преобразованная переменная времени (по формуле (4.4.1): $\tau' = \tau + t_0 - t$).

В формулах (4.5.1),(4.5.2), учитывающих влияние фор-

мулы преобразований времени (4.4.1), между моментами времени τ и τ' существуют зависимость (определяемая этой же формулой). Для каждого текущего значения времени $\tau = t$ из этих формул имеем

$$\left| i_j^{\circ}{}''(t),\, t_0 \right|_{ij} = \left| -\lambda\big(i_j(t) - c_{ij}(t)\big) / \big(a_{ij}(t) - c_{ij}(t)\big),\, t_0 \right|_{ij}, \quad (4.5.3)$$

при $i_j(t) \le c_{ij}(t)$ и

$$\left| i_j^{\circ}{}''(t),\, t_0 \right|_{ij} = \left| \mu\big(i_j(t) - c_{ij}(t)\big) / \big(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)\big),\, t_0 \right|_{ij}, \quad (4.5.4)$$

при $i_j(t) \ge c_{ij}(t)$.

Следует обратить внимание на то, что при переходе от формул (4.1.5),(4.1.6) к формулам (4.5.1),(4.5.2) или (4.5.3), (4.5.4) замену переменной времени $\tau \mapsto \tau'$ мы осуществили только по отношению к временным координатам точек, т.е. преобразования времени (4.4.1) не коснулись зависимых от времени пространственных координат точек.

Это связано с тем, что конкретная картина наблюдения, полученная на любой преобразованной текущей t'- несущей плоскости, в последующие моменты времени, очевидно, становится картиной наблюдения, отвечающей соответствующим прошлым моментам времени. Поэтому ее изображения *без всяких изменений* могут быть воспроизведены на несущих плоскостях, отвечающим прошлым моментам времени.

Формулы (4.5.3),(4.5.4) позволяют на преобразованной текущей t'- плоскости установить положения вершин текущего hal-графа $GH^{\circ}(t')$. Тем самым, сама геометрическая конфигурация hal-графа $GH^{\circ}(t')$, находящегося на ме-

сте исходной несущей плоскости, будет взаимнооднозначным образом определять состояния показаний датчиков, соответствующих настоящему моменту времени. В свою очередь, по этим текущим состояниям взаимнооднозначным образом устанавливаются истинные текущие состояния наблюдаемых объектов, что является важной для слежения.

Изображения прошедших картин наблюдения носят упорядоченный характер, а именно в соответствии с формулами $t' = t_0$ и $t - \tau = t' - \tau'$, вытекающих из формулы преобразований времени (4.4.1), удаление (по времени) каждой фиксированной текущей t - несущей плоскости от произвольной τ - несущей плоскости всегда одинаково с удалением преобразованной текущей t' - несущей плоскости от соответствующей преобразованной τ' - несущей плоскости.

Обратные формулы перехода, с учетом преобразований времени (4.4.1), определяются следующими формулами:

$$|x, \tau'|_{ij} = \left| c_{ij}(\tau) - \frac{1}{\lambda}\left(a_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right) x^{\circ}{}'', \tau' \right|_{ij}, \quad x^{\circ}{}'' \leq 0, \quad (4.5.5)$$

$$|x, \tau'|_{ij} = \left| c_{ij}(\tau) + \frac{1}{\mu}\left(b_{ij}(\tau) - c_{ij}(\tau)\right) x^{\circ}{}'', \tau' \right|_{ij}, \quad x^{\circ}{}'' \geq 0. \quad (4.5.6)$$

где предположено, что между моментами времени τ и τ' существуют зависимость, определяемая формулой (4.4.1).

Формулы (4.5.5) и (4.5.6), в частности, позволяют по наблюдаемым точкам $H^{\circ}_{ij}{}''(\tau) = \left| i^{\circ}_{j}{}''(\tau), \tau \right|_{ij}$ взаимнооднознач-

ным образом найти исходные наблюдаемые значения:

$$H_{ij}(\tau) = \left(i_j(\tau), \tau\right)_{ij}, \; i = \overline{1, N}, \; j = \overline{1, k_i} \; .$$

Суть предлагаемой *геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения* можно выразить следующими соображениями:

1°. При известных оптимальных значениях показаний датчиков, за счет применения гомеоморфных преобразований (4.1.5) и (4.1.6) все вершины hal-графа $GH^\circ(\tau)$ оказываются на оптимальной вертикали $Op^\circ(\tau)$, и поэтому при любом уклонении текущего значения какого-либо датчика от оптимального значения, прямолинейная структура hal-графа $GH^\circ(\tau)$ нарушается, что визуально легко обнаруживается на дисплее. В самом деле, заметить даже небольшого изменения положения, к примеру, какой-либо не концевой вершины hal-графа $GH^\circ(\tau)$, являющейся всего лишь одной из геометрических точек, нетрудно, поскольку это изменение сопровождается изменениями положений бесчисленного множества геометрических точек, из которых собственно состоят два ребра hal-графа, неразрывно примыкающие к этой вершине.

По этой же причине, не составляет особого труда определение качества функционирования объектов наблюдения, которое сводится к простым сравнениям геометрических положений вершин hal-графа $GH^\circ(\tau)$ по отношению к двум граничным вертикалям $GA^\circ(\tau)$, $GB^\circ(\tau)$ и одной оптимальной вертикали $Op^\circ(\tau)$.

2°. При оптимальных значениях всех датчиков, сигнализирующих об идеальном функционировании наблюдаемых объектов, hal-граф совпадает с оптимальной вертикалью, и в итоге, видимая на экране картина наблюдения упрощается. Поскольку в этом случае, текущая картина наблюдения состоит всего из трех неподвижных вертикальных отрезков и различных изображаемых элементов неподвижной преобразованной адаптивной координатной системы (см. примечание 24).

3°. Благодаря тривиальности симметрических структур граничных вертикалей и оптимальной вертикали, воспроизведение их на дисплее еще до начала процесса слежения не представляет трудности при заданных наблюдателем значениях параметров λ и μ.

Например, изображение любой тройки из трех вертикалей, приведенных на рис.13 может быть воспроизведено на экране еще до начала процесса слежения. Поскольку, благодаря преобразованиям времени (4.4.1), изображения граничных вертикалей и оптимальной вертикали, соответствующие произвольному текущему моменту времени τ, всегда оказываются на исходной несущей плоскости, причем на одних и тех же местах, определенных наблюдателем.

Итог действия преобразований (4.1.5) и (4.1.6) к исходным граничным и оптимальным точкам (4.1.1) таков: - мы достигаем конечного эффекта осуществления этих преобразований *без фактической их реализации*, т.е. без проведения вычислений (эти вычисления можно провести заблаговременно, да и то лишь в проверочных целях).

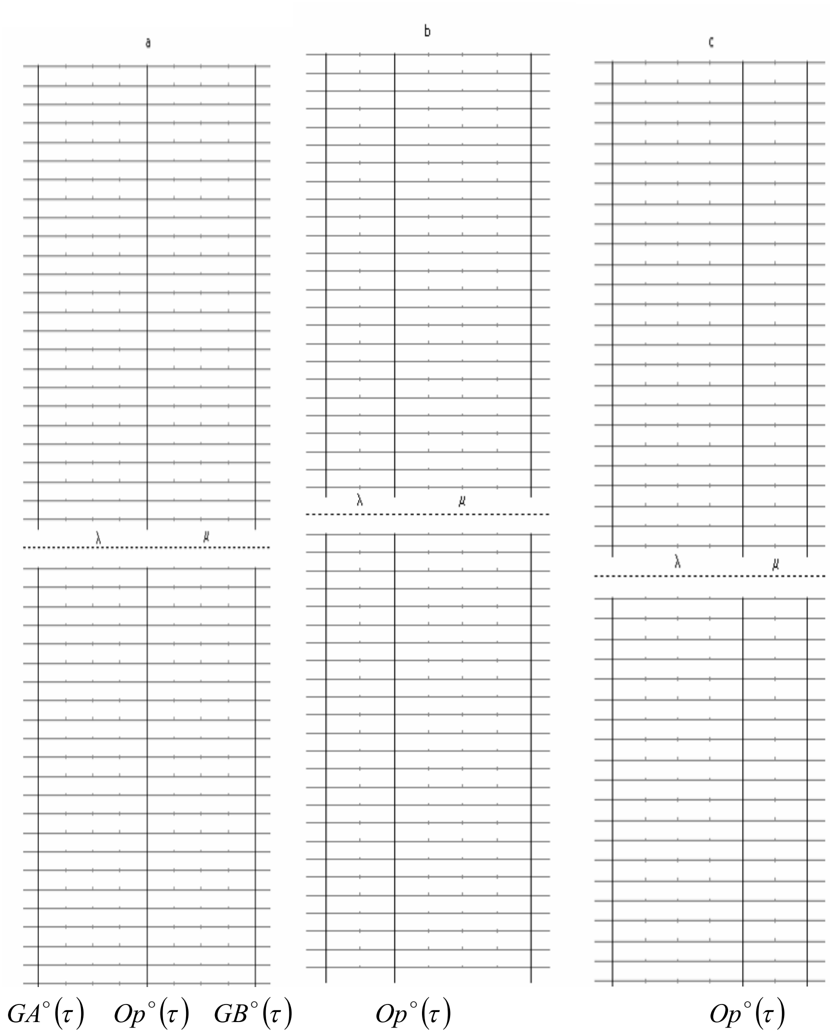


Рис.13. Изображения граничных вертикалей и оптимальной вертикали в преобразованной адаптивной координатной системе в момент времени τ для случаев $\lambda = \mu$, $\lambda < \mu$ и $\lambda > \mu$ соответственно.

4°. В результате применения преобразований времени (4.4.1), все текущие картины наблюдения разворачиваются на неподвижной преобразованной текущей плоскости, расположенной на переднем плане – на месте исходной несущей плоскости. Картины наблюдения, отвечающие прошедшим моментам времени пропорционально течению времени удаляются от этой плоскости в отрицательном направлении ориентации осей времени.

Это, с одной стороны, позволяет наблюдателю путем сравнений картины наблюдения переднего плана, с картинами наблюдения заднего плана, проследить за *эволюциями* (динамикой изменения) положений вершин hal-графов, а с другой стороны, позволяет избавить текущие картины наблюдения от заслоняющих влияний трех τ' - полос и одной τ' - hal-поверхности.

Итак, реализация преобразований (4.4.1) позволяет наблюдателю дополнительно осуществлять слежение за динамикой изменений показаний датчиков. При этом не рекомендуется допускать чрезмерной загрузки дисплея. В связи с этим введем следующее новое понятие.

Определение 4.5.1. *Определяемое выбором наблюдателя общее количество изображаемых прошлых картин наблюдения (т.е. τ'- несущих плоскостей, отвечающих прошедшим моментам времени τ, и размещаемых на дисплее в соответствии с действием преобразований времени), назовем параметром плотности изображаемых прошлых картин наблюдения, или кратко, параметром плотности предыстории наблюдения.*

Параметр плотности предыстории наблюдения обозна-

чим символом ρ.

Общее количество всех изображаемых картин наблюдения, очевидно, определяется равенством $\rho+1$. В частности, выбор наблюдателем нулевого значения для параметра предыстории: $\rho=0$, означает, что наблюдение осуществляется посредством обозрения только текущих картин наблюдения, носителями которых являются абсолютно неподвижные на дисплее текущие t' - несущие плоскости.

При этом, естественно, прошлые картины наблюдения на дисплее не изображаются, чем, с одной стороны, достигается значительное упрощение общей картины наблюдения, однако, с другой стороны, становится затруднительным осуществление слежения за динамикой изменений показаний отдельных датчиков.

На рис.14 изображена одна из возможных картин наблюдения, отвечающая значению $\rho=0$. На рисунке hal-граф изображен жирной линией. Видно, что объект 1 контролируется девятью датчиками и узел этого объекта, контролируемый шестым датчиком, на данный текущий момент времени находится в аварийном состоянии. Из рисунка видно, что датчики с номерами 2 и 3 показывают оптимальные значения. Датчики, контролирующие объект 2 (их количество равно 16), сигнализируют о том, что объект на данный текущий момент времени функционирует в пределах нормы. Семь датчиков, контролирующих объект $N-1$, сигнализируют об идеальном (т.е. оптимальном или номинальном) функционировании этого объекта на данный текущий момент времени. Датчики, контролирующие объект N (их количество равно 18), сигнализируют, что, несмотря

на то, что объект функционирует в пределах нормы, значения датчиков 6 и 11 находятся в опасной близости от соответствующих к этому моменту времени недопустимых значений граничных функций.

Параметр плотности предыстории при значениях $\rho > 0$ указывает только лишь на общее количество изображаемых прошлых картин наблюдения, что оставляет открытым вопрос о выборе конкретных картин наблюдения, которых следовало бы изображать на дисплее в указанном количестве.

По-видимому, часто можно ожидать, что для слежения за эволюциями численных показаний отдельных датчиков наибольшую ценность представят те картины наблюдения, которые соответствуют относительно недавно прошедшим моментам времени.

Имея в виду это обстоятельство, введем еще одно новое понятие.

Определение 4.5.2. *Промежуток времени, назначаемый наблюдателем (в единицах измерения хронометра наблюдения) и отсчитываемый каждый раз, начиная с текущего момента времени, назовем периодом изображения прошлых картин наблюдения, или более кратко, периодом предыстории наблюдения.*

Период предыстории наблюдения обозначим символом ω.

Из приведенных выше определений, в частности, следует, что вне зависимости от конкретных значений ρ и ω, текущие картины наблюдения всегда будут изображены на дисплее.

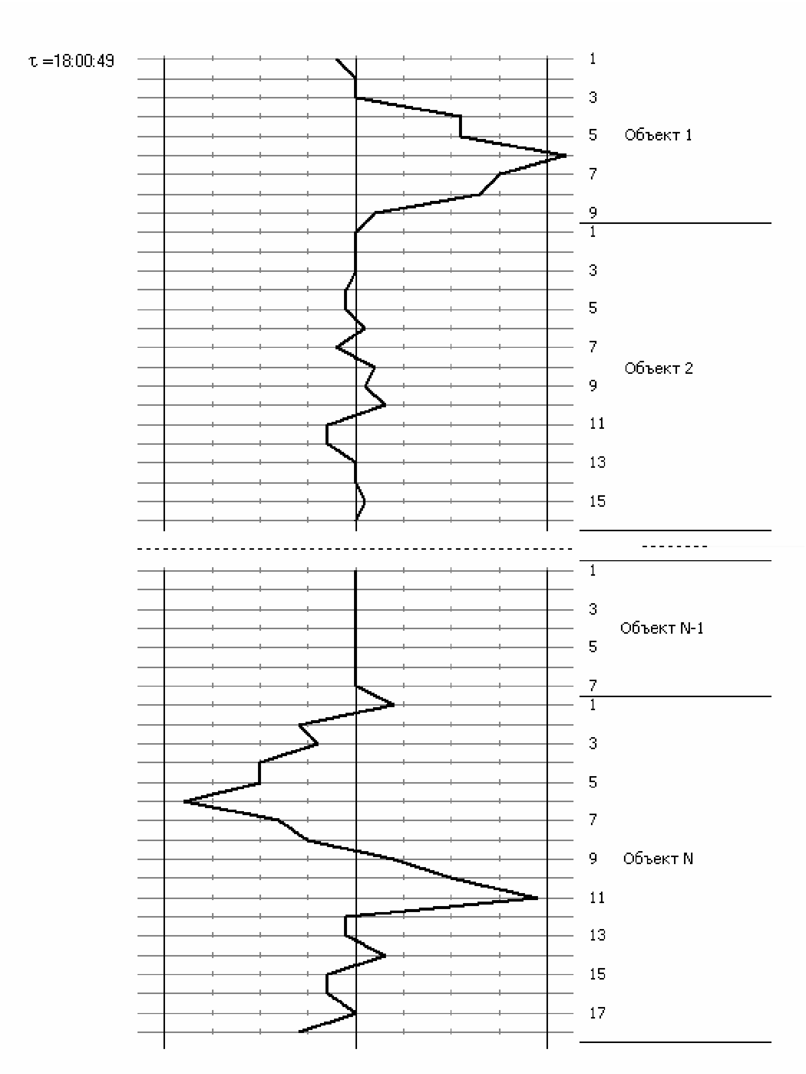


Рис.14. Фрагменты возможной картины наблюдения на некоторый текущий момент времени $\tau = 18:00:49$, отвечающей нулевому значению параметра предыстории.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие применения в процессе слежения параметра плотности ρ и периода предыстории наблюдения ω.

Для определенности примем, что секунда – единица измерения хронометра наблюдения, и является физической размерностью для единицы измерения всех координатных осей времени преобразованной адаптивной координатной системы.

По определению 4.5.2, период предыстории наблюдения ω также будет иметь физическую размерность секунды.

Пример 1. Равенства $\rho = 1$ и $\omega = 2$ означают, что на дисплее в каждую текущую секунду – начиная с момента времени $t \geq t_0 + \omega$ – будут изображены две картины наблюдения, соответствующие текущему моменту времени t и уже прошедшему моменту времени $t - 2$.

Одна из них, а именно картина наблюдения, отвечающая преобразованному текущему моменту времени t' будет расположена на месте исходной несущей плоскости (на переднем плане), так как $t' = t_0$ в соответствии действиями преобразований времени (4.4.1) (синхронно выполняемых на всех временных координатных осях $t_{ij}^{*}{}'$ преобразованной адаптивной координатной системы).

Вторая картина наблюдения, отвечающая прошедшему на две секунды ранее преобразованному моменту времени $t' - 2$, расположится на $t_0 - 2$- несущей плоскости (на заднем плане).

Здесь мы применили формулу:

$$(t-\omega)' = t' - \omega . \qquad (4.5.7)$$

Отметим, что формула (4.5.7) при значении $\tau = t - \omega$ и, с учетом равенства $t' = t_0$, следует из (4.4.1).

Очевидно, что вторая картина наблюдения не будет изображаться на дисплее при значениях: $t < t_0 + \rho\omega$.

На рис.15 изображена возможная общая картина наблюдения, отвечающая значениям $\rho = 1$ и $\omega = 2$. Общее изображение состоит из двух картин наблюдения, отвечающих текущему моменту $\tau = 20.23.18$, и прошедшему на две секунды ранее моменту времени $\tau = 20.23.16$ соответственно. Мы видим, что объект 1 контролируется девятью датчиками, причем положение вершины, соответствующей датчику 7 опасно близок к правой граничной вертикали. Из сравнения положений соответствующих вершин hal-графов видно, что показание 7-го датчика в текущий момент времени стало лучше относительно его показания двух секундной давности. Десять датчиков, контролирующих объект 2, сигнализируют о том, что объект 2 в текущий момент времени функционирует нормально, но все-таки хуже, чем это было на две секунды ранее. Семь датчиков, контролирующих объект $N-1$, сигнализируют об оптимальном функционировании этого объекта в моменты времени $\tau = 20.23.18$ и $\tau = 20.23.16$. 18 датчиков, контролирующих объект N, сигнализируют о том, что этот объект функционирует в пределах нормы, однако в изменениях показаний датчиков 6 и 16 просматриваются опасные тенденции – соответствующие этим датчикам вершины приближаются к граничным вертикалям.

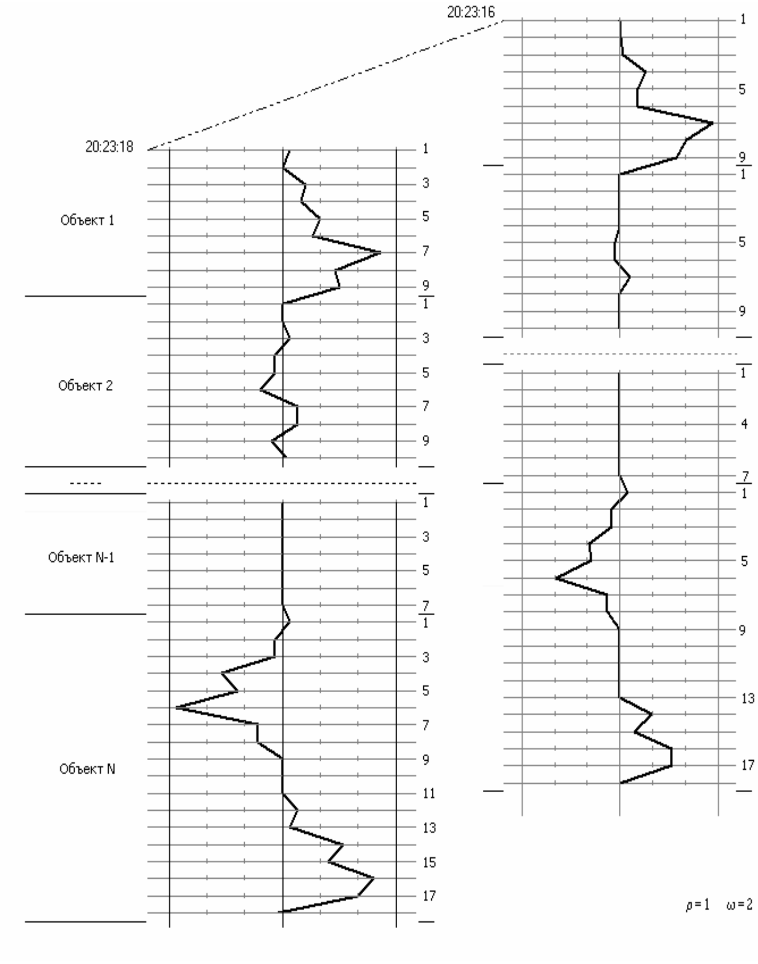


Рис.15. Фрагменты возможной общей картины наблюдения при значениях $\rho = 1$, $\omega = 2\,сек$ и $\chi = 30^\circ$, где χ – угол имитации прямого угла (определен в примечании 30). Во избежание пересечения двух картин наблюдения, осуществлен сдвиг направо для картины, соответствующей прошедшему моменту времени.

Пример 2. Равенства $\rho = 2$ и $\omega = 0.25$ означают, что на дисплее в каждый текущий момент времени $t \geq t_0 + 0.5$ будут изображены три картины наблюдения, соответствующие текущему моменту времени t и двум прошедшим моментам времени $t - 0.25$ и $t - 0.5$.

Картина наблюдения, отвечающая преобразованному текущему моменту времени t', по-прежнему будет расположена на месте исходной несущей плоскости (на переднем плане). С учетом (4.5.7), вторая картина наблюдения, отвечающая прошедшему на четверть секунды ранее преобразованному моменту времени $t' - 0.25$, расположится на $t_0 - 0.25$- несущей плоскости (на среднем плане). Изображение этой картины наблюдения на дисплее появится только при значениях времени: $t \geq t_0 + (\rho - 1)\omega$.

Третья картина наблюдения, отвечающая прошедшему на полсекунды ранее преобразованному моменту времени $t' - 0.5$, с учетом (4.5.7), расположится на $t_0 - 0.5$- несущей плоскости (на заднем плане) и, конечно, она будет отсутствовать на дисплее при значениях времени $t < t_0 + \rho\omega$.

На рис.16 изображена одна из возможных общих картин наблюдения, отвечающих значениям $\rho = 2$ и $\omega = 0.25$. Общая картина наблюдения состоит из трех картин наблюдения, отвечающих текущему моменту $\tau = 11.40.55$ и прошедшим моментам времени $\tau = 11.40.30$ и $\tau = 11.40.05$ соответственно. Здесь, во избежания пересечений картин наблюдения, мы осуществили дополнительные сдвиги направо для картин, соответствующих прошедшим моментам времени. На всех трех картинах наблюдения для раз-

граничения месторасположений датчиков, отнесенных к одним и тем же объектам, использованы горизонтальные черточки. Благодаря этим черточкам из рисунка видно, что наблюдаемый объект 1 контролируется шестью датчиками, объект 2 – тринадцатью датчиками, предпоследний наблюдаемый объект $N-1$ – девятью датчиками и, наконец, последний наблюдаемый объект N – шестнадцатью датчиками.

Ввиду малости значения периода предыстории (четверть секунды), на всех трех картинах наблюдения подавляющее большинство вершин практически не успевают поменять свои положения. Однако, как это видно из сравнения трех hal-графов, положение вершины, соответствующей четвертому датчику объекта 1 стремительно приближается к опасной правой граничной вертикали.

В реальном процессе слежения за динамикой изменений показаний датчиков, во избежание чрезмерной загрузки дисплея, – приводящей к усложнению обшей геометрической картины наблюдения, – имеет смысл, ограничится небольшими значениями параметра плотности предыстории наблюдения. Однако в некоторых случаях, для обеспечения высокого качества слежения за изменениями значений показаний датчиков, может возникнуть потребность, хотя бы в краткосрочном порядке, увеличить количество изображаемых прошлых картин наблюдения. С этой целью в программном обеспечении (решения проблемы слежения) следует предусмотреть возможности, позволяющие наблюдателю соответственно увеличить значение параметра предыстории наблюдения.

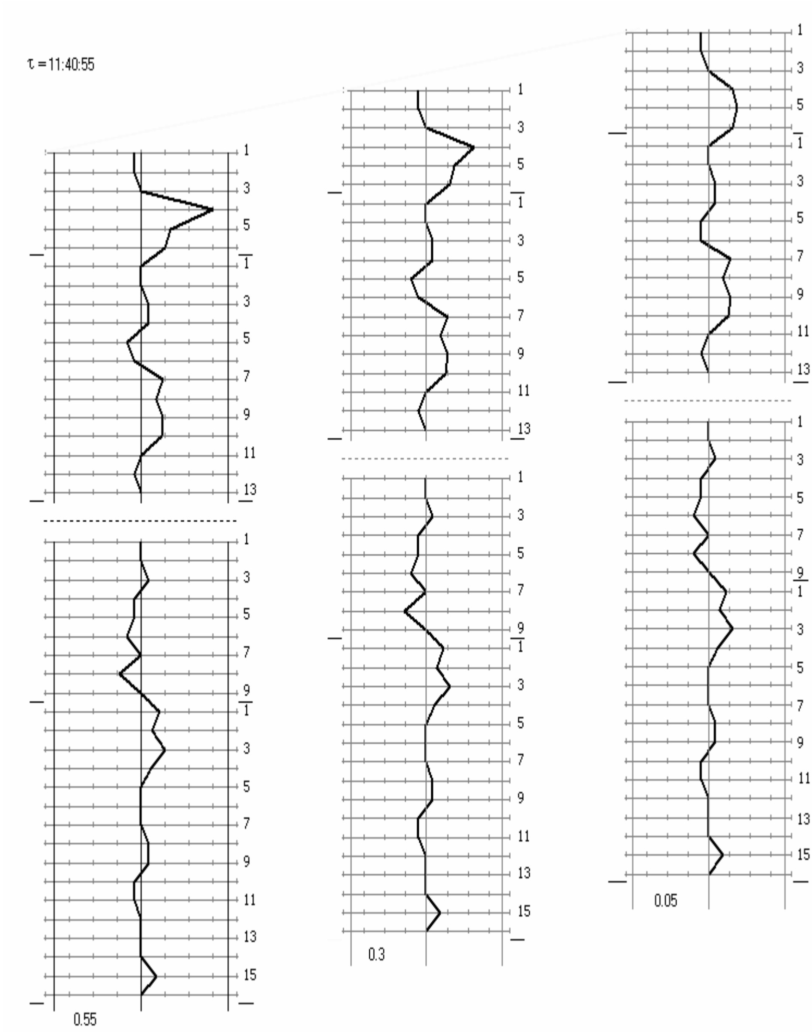


Рис.16. Фрагменты возможной общей картины наблюдения соответствующей значениям $\rho = 2$, $\omega = 0.25$ *сек* и $\chi = 30^\circ$.

Казалось бы, для этого могут быть востребованы большие объемы памяти, нужные для определения и размещения массивов данных текущих картин наблюдения. Из них программа, каждый раз с интервалом времени, равным указанным наблюдателем значению периода предыстории, должна выбирать необходимые для изображения прошлые картины наблюдения в количестве равным значению параметра ρ. В связи с этим в примечании 27 напоминается простой прием, позволяющий обойтись в программе без определений соответствуюших крупных массивов данных.

Как это видно из рисунков 13-16, при изображениях картин наблюдения мы обошлись без изображений осей времени $t_{ij}^{*}{}'$ и стрелок координатных осей $x_{ij}^{*}{}'$ преобразованной адаптивной координатной системы.

Отказ от изображений стрелок координатных осей $x_{ij}^{*}{}'$ приводит к снижению общего количества изображаемых на дисплее второстепенных деталей. Изображения осей времени $t_{ij}^{*}{}'$ становятся фактически излишними после реализации преобразований времени (4.4.1). Кроме того, такой шаг оправдан наличием альтернативной возможности создания на каждой изображаемой τ'- несущей плоскости по одной метке, в которой указывается соответствующее для этой несущей плоскости значение момента времени τ', устанавливаемое показаниями хронометра наблюдения.

Ниже, в примечании 25 оценивается максимальное количество датчиков, за которыми в течение длительного времени наблюдатель сможет вести одновременное надежное слежение. Оценка проведена на основе определе-

ния максимально возможного количества одновременно умещаемых на заданном дисплее параллельных координатных осей (с ненулевым пропуском). В примечании 26 оценено общее количество арифметических операций, необходимых для получения пространственных координат вершин текущего hal-графа. Здесь же приведены соображения об общем количестве арифметических операций, нужных для вычисления координат изображений черточек, устанавливающих деления (по длинам единиц измерения) на не временные координатные оси преобразованной адаптивной координатной системы. В примечаниях 28 и 29 приведены пояснения к некоторым простым упрощениям процедуры слежения. Они носят рекомендательный характер и частично уже применены на некоторых из рисунков 13-16. Для удобства програмистов в примечании 30 приведен список некоторых исходных данных, нужных при составлении программы по предложенной версии решения проблемы слежения.

Примечания:

24. Текущая картина наблюдения может состоять из трех неподвижных вертикальных отрезков (конечно, не считая различных изображаемых элементов самой преобразованной адаптивной координатной системы) еще в двух других случаях, указывающих на катастрофические текущие состояния всех без исключения наблюдаемых объектов. В первом случае, hal-граф может полностью совместиться с левой граничной вертикалью, а во втором – с правой граничной вертикалью. Для различения этих трех случаев можно воспользоваться различными приемами (например, адекватным расположением меток совмещающихся вертикалей или изменением их толщины, соответствующим цветовым решением и т.д.). Отметим, что смешанные случаи, когда часть hal-графа располага-

ется на одной вертикали, а остальная часть – на другой, обычно легко распознаются благодаря цельности геометрической структуры hal-графа.

25. Максимально возможное количество $n_{\max}$, размещаемых на заданном дисплее параллельных координатных осей, определяется по высоте h прямоугольной площади экрана дисплея и ненулевой величине осредненного пропуска (расстояния) δ между ближайшими соседними координатными осями преобразованной адаптивной координатной системы.

Если считать, что h и δ имеют длины с одинаковой физической размерностью, то

$$n_{\max} = [(h-\sigma)/\delta]+1 , \qquad (4.5.8)$$

где наружные скобки – целая часть заключенного в них числа, а заданием численного значения величине σ, $0 \le \sigma << h$, на экране резервируются два запасные места (сверху и снизу), которые позволяют выдержать для изображений некоторые пропуски соответственно от верхней и нижней границы экрана. Эти места потенциально могут быть затребованы так при возникновении необходимости в увеличении общего количества размещаемых на экране координатных осей, как и при изображениях прошлых картин наблюдения.

Из формулы (4.5.8) видно, что максимально возможное число размещаемых на экране не временных координатных осей пропорционально высоте h и обратно пропорционально величине осредненного пропуска. На обычных малогабаритных дисплеях чрезмерное уменьшение величины осредненного пропуска δ, несомненно, приведет к ухудшению качества изображения hal-графа. Тем не менее, качество изображения при малых значениях параметра δ может не ухудшиться в случае, когда общая картина наблюдения посредством проектора (с высокой четкостью разрешения) в достаточно увеличенном виде воспроизводится на большом экране соответствующих размеров. Например, если по техническим данным используемого дисплея $h = 47$ *см* (для справки отметим, что например, дисплей HP L2245W имеет ширину экрана ≈ 47 *см* и кон-

структивно допускает поворот на прямой угол, благодаря чему для него можно полагать, что $h = 47$ *см*), и мы примем, что $\sigma = 5$ *см*, $\delta = 0.084$ *см*, то $n_{\max} = 501$ *см* в соответствии с (4.5.8). Однако полученные картины наблюдения заведомо будут не подходящими для слежения в силу малости значения осредненного пропуска. После, скажем, пятикратного увеличения изображения проектором, на большем экране реально видимое значение осредненного пропуска между ближайшими соседними координатными осями будет величиной порядка 0.42 *см*, и качество изображения 501 – вершинного hal-графа станет более удовлетворительным. В результате у наблюдателя появится возможность для ведения слежения в непрерывном режиме одновременно за изменениями численных показаний 501 датчиков произвольного назначения. Очевидно, что при относительно большом или, наоборот, малом числе датчиков запросы, касающиеся характеристик дисплея, или кратности увеличения проектора могут быть изменены в ту или иную сторону.

Вообще говоря, то, что в конструкции адаптивной координатной системы при изображениях картин наблюдения мы отдаем большее предпочтение не ширине, а высоте экрана, носит условный характер. Это, с одной стороны, связано с нашим стремлением сохранит аналогию с убедительно успешным строительным опытом по применению отвеса, отмеченного ранее во введении книги. С другой стороны, именно при таком подходе на экране экономится много места, достаточное для размещения изображений прошлых картин наблюдения, благодаря чему становится возможным осуществление слежения за динамикой изменения наблюдаемых значений датчиков. Отметим, что в разделе 4.6 мы рассмотрим адаптивную координатную систему, обладающую иной, компактной конструкцией строения, правда, исключающей слежение за динамикой изменений наблюдаемых значений датчиков.

26. Оценим максимальное количество арифметических операций, необходимых в каждый текущий момент времени t для установления координат всех вершин hal-графа в преобразованной адаптивной координатной системе.

Оценку произведем по формулам (4.5.3) и (4.5.4).

Так как логические операции $i_j(t) \le c_{ij}(t)$ и $i_j(t) \ge c_{ij}(t)$ – взаимодополняющие, то из $2n$ скалярных формул (4.5.3) и (4.5.4) в каждый текущий момент времени могут быть реализованы только n формул. Напомним, что при равенстве $i_j(t) = c_{ij}(t)$ обе формулы для пространственных координат дают одинаковое нулевое значение $i_j^{\circ}{}''(t) = 0$, так что в этом случае никакие арифметические операции не нужны. Поэтому с вычислительной точки зрения особый интерес представляют случаи:

$$i_j(t) < c_{ij}(t),\ i_j(t) \ne a_{ij}(t) \text{ и } i_j(t) > c_{ij}(t),\ i_j(t) \ne b_{ij}(t).$$

В I координатной системе на каждой координатной плоскости $X_{ij} \times t_{ij}$ зафиксируем по одной точке с координатами вида

$$\left(i_j(t), t\right)_{ij},\ i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, k_i}\ .$$

Примем, что пространственные координаты этих точек могут различаться произвольным образом, тогда как временные координаты у всех точек одинаковые. Простой подсчет показывает, что в текущий момент времени t для вычисления всех разностей $i_j(t) - c_{ij}(t)$ потребуются выполнить n операций вычитания.

Аналогично, максимальное количество арифметических операций, требуемых для вычисления численных значений либо выражений $\lambda / \left(c_{ij}(t) - a_{ij}(t)\right)$, либо же $\mu / \left(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)\right)$, равно $2n$.

Следовательно, во всякий текущий момент времени искомое максимальное количество арифметических операций будет равно $4n$.

Однако выражения $\lambda / \left(c_{ij}(t) - a_{ij}(t)\right)$ и $\mu / \left(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)\right)$, часто можно определить по заранее заданным значениям параметров λ, μ и изначально известным пространственным координатам граничных и оптимальных точек. Обычно эти выражения могут быть вычислены заблаговременно, т.е. до начала процесса слежения (в процессе обучения).

Стало быть, *в самом процессе слежения для вычисления пространственных координат вершин текущего hal-графа в каждый*

момент времени обычно может потребоваться выполнить не более $2n$ *арифметических операций, состоящих из* n *вычитаний и соответственно* n *умножений.*

В соответствии с формулами (4.5.3) и (4.5.4), при оптимальных значениях показаний всех датчиков арифметические операции просто не нужны, и искомое количество арифметических операций будет равным нулю. Уменьшение количества арифметических операций происходит и в предельных случаях, т.е. тогда, когда имеет место либо равенство $i_j(t) = a_{ij}(t)$ ($i_j^{\circ}{}''(t) = -\lambda$), либо же равенство $i_j(t) = b_{ij}(t)$ (в этом случае: $i_j^{\circ}{}''(t) = \mu$).

Оценим теперь общее количество арифметических операций, необходимых в каждый текущий момент времени для вычисления координат изображений черточек, устанавливающих деления (по длинам единиц измерения) на не временных координатные осях преобразованной адаптивной координатной системы.

Для проведения оценки существуют два различных способа.

Первый способ, «возникает» на основе спекуляций о том, что для организации процедуры слежения не существует серьезной необходимости в построении ни I координатной, ни II адаптивной координатной системы. Действительно, можно непосредственно опираться на преобразованную адаптивную координатную систему, не забывая при этом формулы преобразования, которые «обязаны» своим происхождением первым двум координатным системам. При этом появляется «лазейка»: - Раз мы можем обойтись без построения этих координатных систем, то сможем обойтись и без фактической фиксации для них общей длины единицы измерения не временных координатных осей. Следует признать, что несмотря на очевидную ошибочность такого подхода, в нем содержится определенное рациональное зерно. В самом деле, даже формальные деления осей преобразованной адаптивной координатной системы на равные промежутки, создают на них шкалы, деления которых как ориентиры облегчают восприятие месторасположений вершин hal-графа. Естественно, при реализации первого способа не требуется выполнит арифметических операций (по формулам (4.5.3) и (4.5.4)).

Для описания рекомендуемого второго способа, воспользуемся формулами преобразований для пространственных координат (4.1.7) и (4.1.8).

Обозначим символом e величину общей длины единиц измерения не временных координатных осей I координатной системы (раздел 1.2).

Пуст t – текущий момент времени, а q_1 и q_2 – пространственные координаты двух ближайших соседних (по расположению) разделительных черточек, находящихся на одной фиксированной координатной оси $x_{ij}^{*}{}'$.

Для определенности положим, что

$$q_2 > q_1 > c_{ij}(t), \tag{4.5.9}$$

т.е. разделительные черточки с этими координатами находятся по правую сторону от оптимальной вертикали.

С учетом обозначения общей длины единиц измерения, имеем

$$q_2 - q_1 = e. \tag{4.5.10}$$

Применяя формулу (4.1.8) (с учетом (4.5.9)) для определения длины единицы измерения положительной части координатной оси $x_{ij}^{*}{}'$ получим следующее выражение:

$$e_{ij}^{+}(t) = q_2^{\circ}{}'' - q_1^{\circ}{}'' = \frac{\mu\,(q_2 - c_{ij}(t))}{b_{ij}(t) - c_{ij}(t)} - \frac{\mu(q_1 - c_{ij}(t))}{b_{ij}(t) - c_{ij}(t)},$$

откуда, принимая во внимание (4.5.10), имеем

$$e_{ij}^{+}(t) = \mu\, e/(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)), \tag{4.5.11}$$

где $e_{ij}^{+}(t)$– длина единицы измерения положительной части координатной оси $x_{ij}^{*}{}'$ на момент времени t.

Далее, учитывая неравенства $q_2 < q_1 < c_{ij}(t)$, где $q_1 - q_2 = e$, и формулу (4.1.7), для величины $e_{ij}^{-}(t)$ – длины единицы измерения отрицательной части координатной оси $x_{ij}^{*}{}'$ на момент времени t, найдем, что

$$e_{ij}^{-}(t) = q_1^{\circ}{}'' - q_2^{\circ}{}'' = \lambda\, e / \left(c_{ij}(t) - a_{ij}(t)\right). \qquad (4.5.12)$$

Общее количество формул (4.5.11) и (4.5.12) равно $2n$, а каждое выражение $\lambda/\left(c_{ij}(t) - a_{ij}(t)\right)$ и $\mu/\left(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)\right)$, как это было отмечено выше, часто может быть вычислено заблаговременно, т.е. до начала процесса слежения (в процессе обучения).

Таким образом, в случае заблаговременного вычисления этих выражений, в каждый момент времени t для определения длин единиц измерения не временных координатных осей преобразованной адаптивной координатной системы, необходимо выполнить операции умножения в количестве $2n$ при условии, что $e \neq 1$. В противном случае, т.е. при соблюдении равенства $e = 1$, проводит какие-либо вычисления по формулам (4.5.11) и (4.5.12) не требуется.

Следует особо обратить внимание на то, что выражения

$$\lambda/\left(c_{ij}(t) - a_{ij}(t)\right),\ \mu/\left(b_{ij}(t) - c_{ij}(t)\right)$$

являются общими, т.е. используются так при вычислениях координат вершин hal-графа, как и при опрелениях длин единиц измерений в преобразованной адаптивной координатной системе.

27. Мы уже указали причину, согласно которой имеет смысл, ограничится небольшими значениями параметра ρ – плотности предыстории наблюдения. Допустим теперь, что нам заранее, т.е. до начала процесса наблюдения известны те предполагаемые численные значения ρ и ω, которые отличаются от исходных численных значений этих параметров и потенциально могут быть заданы наблюдателем уже по ходу процесса слежения. Совокупностью исходных и предполагаемых значений параметров ρ и ω на дисплее точно определяется максимально возможное число мест, на которых размещаются или потенциально могут быть размещены картины наблюдения, отвечающие прошлым моментам времени. Для краткости условно назовем все эти места *местами наблюдения за прошлым* в преобразованной адаптивной координатной системе.

Если места наблюдения за прошлым априори известны, то существует способ, позволяющий обойтись в программе без введения

многочисленных крупных массивов данных. Можно поступить, например, следующим образом. Изображения картин наблюдения, появляющиеся на текущей несущей плоскости, копируются и синхронно, в невидимом режиме воспроизводятся без изменений на всех несущих плоскостях, расположенных в местах наблюдения за прошлым. Свойство видимости, естественно, придается только тем прошлым картинам наблюдения, которые по действительным значениям времени хронометра наблюдения и значениям параметров ρ и ω должны быть видимыми на дисплее. Возможны и другие варианты.

28. На рисунках 15-16, выполненных на белом фоне, при темном цвете, используемом для изображения текущих картин наблюдения, можно выбрать менее темный цвет для изображения прошлых картин наблюдения (обратно при темном цвете фона, мы выбрали бы для текущих картин наблюдения светлый цвет, а для прошлых картин наблюдения какой-нибудь менее светлый цвет). Этим подчеркивается исключительная важность обеспечения хорошей видимости для текущих картин наблюдения, отражающих настоящие состояния наблюдаемых объектов, и всегда размещаемых вне зависимости от текущих значений времени хронометра наблюдения на переднем плане.

Как обычно, при выборе того или иного цветового решения рекомендуется избегать как чрезмерной пестроты картин наблюдения – затеняющей видимость основных геометрических элементов слежения, так и блеклой однотонности картин наблюдения – вызывающей быстрое утомление зрения наблюдателя при длительном времени слежения.

29. Для процесса слежения представляется немаловажным порядок обозначений координатных осей, наблюдаемых объектов и соответствующих им датчиков. Принятый нами порядок обозначений представляется удобным для описания и обоснования законности предлагаемой версии решения для проблемы глобального наблюдения. Однако в реальности, ввиду многочисленности и разнообразия наблюдаемых объектов и датчиков, само установление (по

готовому списку) связи между ними и соответствующими им координатными осями преобразованной адаптивной координатной системы, может потребовать от наблюдателя затрат некоторого времени. На рис.14-16 мы в демонстрационных целях использовали новый порядок обозначений координатных осей, способствующих уменьшению таких потерь времени. Ниже приводится описание некоторых из этих обозначений. С учетом формул (4.1.10), мы их опишем, в частности, для наблюдаемой скалярной величины: – $i_j(\tau)$, по определению равной в момент времени τ, $\tau \in T_t$, $t \in T$, численному значению показания j - го датчика отнесенного к объекту i, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,k_i}$.

Координатную ось $x_{ij}^{*}{}'$ переобозначим двойными символами ij, т.е. обойдемся без употребления индексов. Для величины $i_j^{\circ}{}''(\tau)$ полагаем, что значение момента времени τ будет указано внутри метки, выделенной для соответствующей (по преобразованиям времени (4.4.1)) τ' - несущей плоскости.

Для применения новых обозначений координатных осей можно употреблять, например, один из следующих трех вариантов:

По первому варианту, на текущих несущих плоскостях при употреблении обозначений ij, предполагается путем использования какого-нибудь объединяющего символа, например, разделительных черточек или односторонних скобок, выделить (обозначить) группу датчиков, относящихся к отдельным объектам. При этом имеет смысл между двумя черточками или рядом с каждой скобкой, указать условное название наблюдаемого объекта соответствующего этой группе датчиков.

По второму варианту, обозначения i, j или то же самое ij, мы преимущественно будем применять по отношению к координатным осям, соответствующим первым датчикам, отнесенным каждому объекту i, последующие же датчики, отнесенные этому же объекту, будем обозначать без конкретного указания принадлежности

этих датчиков объекту i, т.е. не использовать для них двух символьный порядок обозначений.

Это оправдано тем, что двойные символы, использованные для обозначения координатных осей, соответствующих первым датчикам наблюдаемых объектов, по-видимому, сами легко могут выполнять разделительные функции между группами датчиков, относящихся к различным наблюдаемым объектам.

Третий вариант применения новых обозначений охватывает некоторые возможные комбинации из первых двух вариантов.

Во всех этих вариантах мы будем считать не обязательным использование численной маркировки, т.е. нумерацию с помощью натуральных чисел. Это означает, что значения каждой из букв i и j теперь могут быть продублированы, т.е. они вторично могут принимать значения, состоящие из произвольной конечной совокупности любых букв и цифр.

Например, если наблюдаемый объект i – пассажирский самолет, выполняющий рейс с условным номером $BH431$, то мы можем полагать, что i принимает значение равное $BH431$. На тот случай, когда все датчики, отнесенные этому объекту, пронумерованы по-прежнему, т.е. j принимает численные значения: $j=\overline{1,k_i}$, то между прежними и соответствующими новыми обозначениями, по второму варианту, будут иметь место следующие соответствия:

$$i1 \leftrightarrow BH431, 1\,,\ i2 \leftrightarrow 2\,,\ i3 \leftrightarrow 3\ ,\ldots,\ ik_i \leftrightarrow k_{BH431}\,.$$

Подобные обозначения, нарушающие прежний общий упорядоченный порядок обозначений, установленный за счет применения натуральных чисел, по-видимому, лучше соответствуют целям слежения. В частности, после совершения посадки самолетом рейса $BH431$, необходимость в слежении этого объекта исчезнет, и из картины наблюдения могут быть изъяты все выделенные для рейса $BH431$ координатные оси, без внесения – и это важно – каких-либо изменений в обозначения остальных координатных осей преобразованной адаптивной координатной системы. Иначе говоря, не будет необходимости в осуществлении каких-либо повторных нумераций.

В целях повышения информативности общей картины наблюдения, представляется полезным на каждой текущей несущей плоскости указать рядом с каждым примененным новым обозначением координатной оси $x_{ij}^{*}{}'$, соответствующую физическую размерность единицы измерения этой оси. Во избежание усложнения общей картины наблюдения излишними деталями, на остальных изображаемых несущих плоскостях делать этого не рекомендуется.

30. Несмотря на то, что мы решили не изображать на картинах наблюдения координатных осей времени $t_{ij}^{*}{}'$, нам все-таки понадобится ввести еще один параметр χ – *угол имитации прямого угла*, характеризующий фактически видимый угол расположения этих осей относительно не временных осей преобразованной адаптивной координатной системы.

Обычно такой параметр используется, когда возникает необходимость для изображения прямых линий, ортогональных к двумерной плоскости экрана. Собственно, выше на изображениях осей времени мы по умолчанию его уже применяли. Не изображаемые оси времени, по определению, ортогональны в соответствующих точках $C_{ij}^{\circ}{}''(\tau') = |0, \tau'|_{ij}$ ко всем преобразованным τ' – несущим плоскостям.

Изменение наблюдателем значения угла имитации в пределах открытого угла $0^{\circ} \leq \chi \leq 180^{\circ}$, может позволить размещать на экране под соответствующим углом обзора нужную совокупность изображаемых прошлых картин наблюдения.

Приведем список некоторых исходных данных, которых, по-видимому, следовало бы использовать в программе для предложенной версии решения проблемы глобального наблюдения (и в частности, для построения диалогового интерфейса).

Список некоторых исходных числовых параметров:

N – общее количество наблюдаемых объектов;

n – общее количество датчиков, отнесенных к наблюдаемым объектам с учетом ограничения $n \le n_{\max}$, $n_{\max}$ – определяется из формулы (4.5.8);

k_i – общее количество датчиков, отнесенных наблюдаемому объекту i, где по условиям: $i = \overline{1, N}$ и $k_1 + k_2 + ... + k_N = n$;

δ – ненулевая величина осредненного пропуска между изображаемыми на экране ближайшими соседними не временными координатными осями преобразованной адаптивной координатной системы;

σ – значением этой величины на *объекте программы* (назовем его *Picture1*), носящем изображения текущих картин наблюдения, резервируются два запасных места (сверху и снизу), которые позволяют выдержать для изображений пропуски соответственно от верхней и нижней границы экрана, здесь $0 \le \sigma << h$ и h – высота прямоугольника экрана;

t_0 – начальный момент времени, определяется показанием хронометра наблюдения на момент начала слежения;

t_1 – конечный момент времени наблюдения, здесь $t_1 > t_0$;

t – текущий момент времени, определяется текущим показанием хронометра наблюдения;

τ – переменная времени, здесь $\tau \in T_t$;

τ' – преобразованная переменная времени, определяется формулой (4.4.1);

s – шаг квантования (дискретизации), с каждым допустимым (т.е. $0 < s \le t_1 - t_0$) значением которого определяются *узловые точки* промежутка времени $T = [t_0, t_1]$, имеющие равномерное расположение. Узловые точки, вычисляемые по формуле $t_0 + m \cdot s$, $m = 0, 1, ..., M$, определяют дискретные значения аргументов, являющихся общими для всех левых и правых граничных функций, оптимальных функций, а также для функций, задаваемых численными показаниями контролируемых датчиков. Здесь

$$M = 1 + [(t_1 - t_0)/s];$$

λ – параметр преобразований, по величине равный расстоянию между вертикалями $GA^\circ(\tau)$ и $Op^\circ(\tau)$ $\forall \tau \in T$; в процессе слежения используется в качестве левого (от оптимальной вертикали) масштабного параметра;

μ – параметр преобразований, по величине равный расстоянию между вертикалями $GB^\circ(\tau)$ и $Op^\circ(\tau)$ $\forall \tau \in T$; используется в качестве правого (от оптимальной вертикали) масштабного параметра (увеличения значений масштабных параметров сопровождаются соответствующими увеличениями длин невертикальных ребер hal-графа, что, по-видимому, может способствовать улучшению распознавания отклонений его вершин от соответствующих вершин оптимальной вертикали или граничных вертикалей. Часто имеет смысл полагать, что $\lambda = \mu$, однако, если в процессе слежения станет известно, что наиболее важные, образно говоря, «события» разворачиваются, например, на правой от оптимальной плоскости времени полуплоскости, то в соответствии со сказанным, рекомендуется полагать, что $\lambda < \mu$, или даже: $\lambda << \mu$;

ξ – расстояние от верхней стороны прямоугольника экрана до первой сверху не временной координатной оси, здесь $0 < \xi < \sigma$. Параметр ξ нужен для определения месторасположения начальной точки $O_{11}^\circ{}' = |\, 0,\, t_0|_{11}$ на объекте программы *Picture1*, и используется в качестве вертикального параметра оператора шкалы;

η – расстояние от левой стороны прямоугольника экрана до пересечения оптимальной плоскости времени с исходной несущей плоскостью, здесь $\lambda < \eta << w$, w – ширина прямоугольника экрана. Параметр η нужен для определения местоположения начальной точки $O_{11}^\circ{}' = |\, 0,\, t_0|_{11}$ на объекте программы *Picture1*, и используется в качестве горизонтального параметра оператора шкалы;

χ – угол имитации прямого угла, его назначение описано в начале данного примечания;

ρ – параметр плотности предыстории наблюдения, определяет общее количество изображаемых прошлых картин наблюдения;

ω – период предыстории наблюдения, используется для определения точных мест расположения прошлых картин наблюдения в количестве ρ;

Δ – определяет величину сдвига направо прошлых картин наблюдения для исключения случаев их пересечения.

Исходные функции – фиксируют допустимые пределы и оптимальные значения показаний датчиков на дискретных (узловых) точках отрезка времени. Определяются в процессе предварительного или текущего обучения.

Список исходных функций:

$a_{ij}(t)$ ($b_{ij}(t)$) – левая (правая) граничная функция, определяет в узловых точках нижние (верхние) граничные значения численных показаний j - го датчика отнесенного объекту i;

$c_{ij}(t)$ – оптимальная функция, определяет в узловых точках оптимальные значения численных показаний j - го датчика отнесенного к объекту i.

4.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАРТИНЫ НАБЛЮДЕНИЯ В ВИДЕ ЦИФЕРБЛАТА

Принятый в книге вид hal-графа во многом предопределяется конструкцией адаптивной координатной системы, причем главным образом, условием параллельности координатных плоскостей. В примечании 6 было отмечено, что иногда можно обходиться без условия параллельности координатных осей адаптивной координатной системы. Там же законность реализации такой возможности мотивировалась тем, что переход в новые пространственные положения для этих осей можно осуществлять посредством

конечного числа непрерывных обратимых преобразований переноса и вращения, не нарушающих гомеоморфизм типа (1.3.2).

Таким образом, для нас существенным оказывается не требование соблюдения параллельности осей адаптивной координатной системы, а наличие гомеоморфного отображения (1.3.2). Естественно, при отказе от условия параллельности координатных осей адаптивной координатной системы, не приводящем к нарушению гомеоморфизма типа (1.3.2), можно получать hal-графы с совершенно новыми строениями.

Ниже, мы построим такой аналог описанной выше системы наблюдения, в которой вообще не существуют параллельных координатных плоскостей. В результате, мы получим аналоги hal-графа, оптимальной вертикали и граничных вертикалей, обладающие принципиально иными и, по-видимому, не очень сложными для зрительного восприятия строениями.

Примем, что $c_{11}(t_0) > 0$. В случае, когда это предположение может привести к ограничению общности, мы, в соответствии с примечанием 8, вместо $c_{11}(t_0)$ возьмем произвольно фиксированное значение $a > 0$.

Мы будем исходить из того положения, что в изображениях преобразованной адаптивной координатной системы, с наблюдательной точки зрения, для нас обычно интерес представляют немного удлиненные (в обе стороны) те отрезки не временных координатных осей, которые заключены между граничными вертикалями (см. рис.13). Эти отрезки будем называть *опорными отрезками*.

Таким образом, опорные отрезки по длине несколько превышают величину $\lambda + \mu$.

В картине наблюдения, соответствующей текущему моменту времени, произведем непрерывные движения – переносы и вращения, таким образом, что все опорные отрезки не пересекаясь и без деформаций, заняли радиальные направления, сходящиеся к одному и тому же центру, и расположились симметрично относительно этого центра. При этом ближе к центру, и на одинаковом удалении от него должны располагаться те концы опорных отрезков, которые в преобразованной адаптивной координатной системе расположены левее от оптимальной вертикали.

Предполагается, что каждые две ближайшие опорные отрезки после этих движений образуют между собой один и тот же угол, равный по величине $360^\circ / n$ градусам, где n выражает общее количество контролируемых датчиков.

На рис.17 изображена совокупность опорных отрезков, занявших радиальные расположения.

После описанной только, что процедуры надлежащего свертывания в «радиусы окружности» опорных отрезков, оптимальная вертикаль и граничные вертикали примут вид правильных n - вершинных многоугольников, а соответствующим аналогом hal-графа будет n - вершинный многоугольник (следует иметь в виду, что замкнутость последнего может быть нарушена только в одном месте – между вершинами 1 и n).

Представляется естественным, теперь, называть оптимальную вертикаль – *оптимальным многоугольником*.

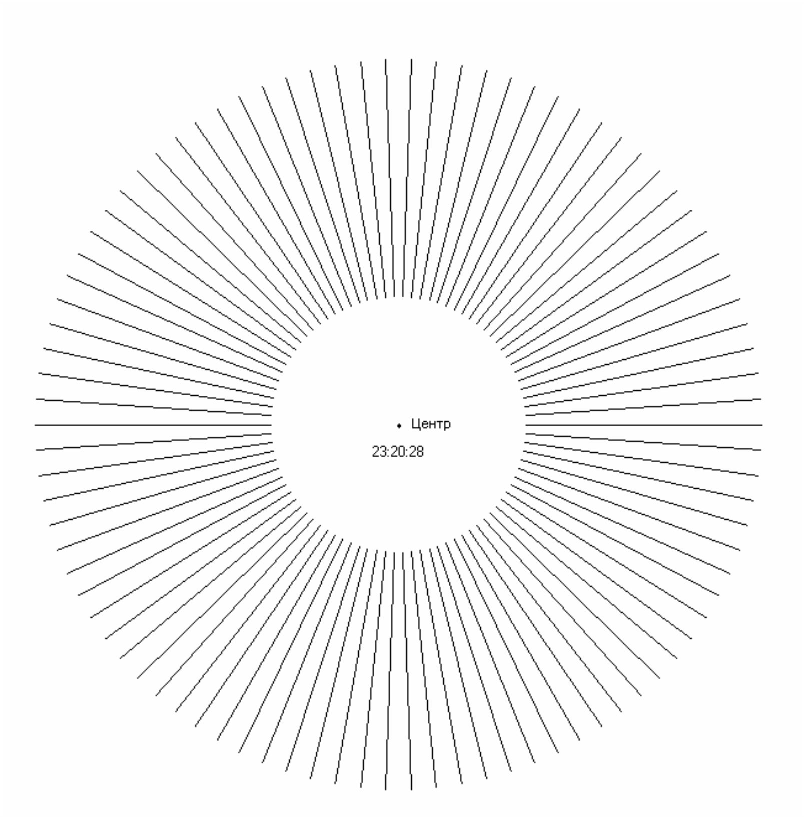


Рис.17. Изображения радиально расположенных опорных отрезков для случая, когда общее количество датчиков: $n = 90$.

Каждые две ближайшие опорные отрезки образуют между собой один и тот же угол, равный по величине четырем градусам. Метка для показаний хронометра наблюдения, размещена недалеко от центра, к которому сходятся все радиально расположенные опорные отрезки.

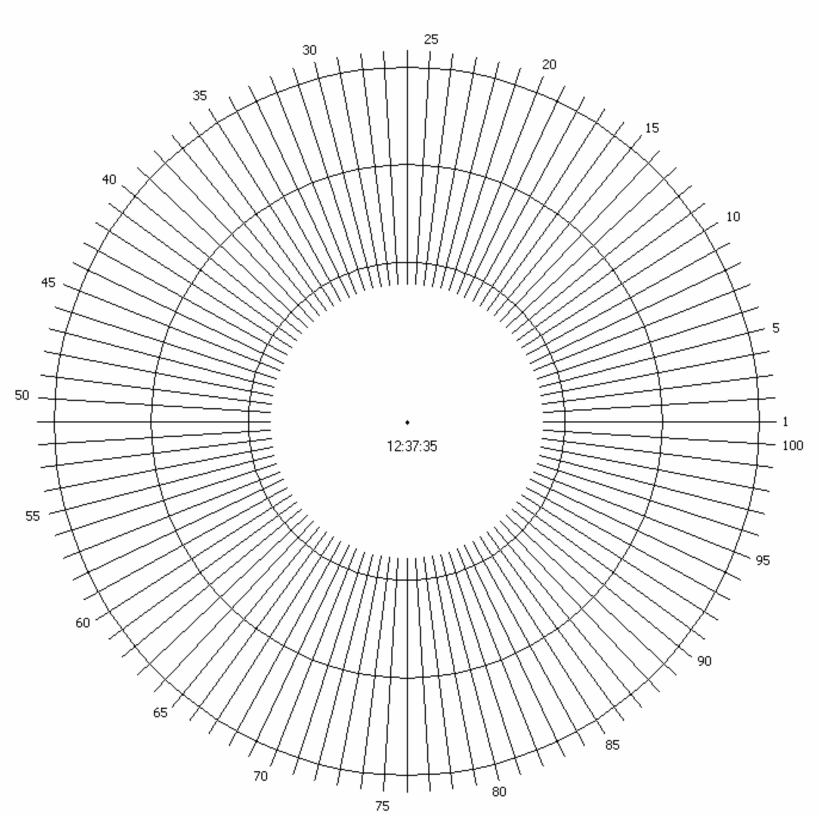


Рис. 18. Изображения радиально расположенных опорных отрезков, оптимального многоугольника, внутреннего и внешнего многоугольников для случая, когда общее количество датчиков определяется равенством $n = 100$. Каждые две ближайшие опорные отрезки образуют между собой один и тот же угол, равный по величине 3.6°.

Аналог левой граничной вертикали назовем *внутренним многоугольником*, соответственно правую граничную вертикаль – *внешним многоугольником* (см. рис.18).

Наконец, ћal-граф назовем *ћal-многоугольником*.

Для поверхностей, соответствия между прежними и новыми названиями могут быть следующими:

Левая граничная полоса – *внутренняя граничная поверхность*;

Правая граничная полоса – *внешняя граничная поверхность*.

Название ћal-поверхности, теперь означающее, что эта поверхность по ходу времени «очерчивается» ћal-многоугольником, остается без изменений.

Каждый ћal-многоугольник имеет вершины, координаты которого взаимнооднозначно определяются численными значениями контролируемых датчиков, преобразованными на этот раз не только формулами (4.5.1),(4.5.2), но и дополнительно, соответствующими преобразованиями переносов и вращений, приводящих к радиальным расположениям опорных отрезков.

Очевидно, что чем больше значение n, тем больше приведенные на рисунке многоугольники будут по форме напоминать окружности.

По аналогии, в случае, когда все численные значения датчиков соответствуют оптимальным, то ћal-многоугольник будет совпадать с соответствующим по времени оптимальным многоугольником. Каждая вершина ћal-многоугольника обладает одной степенью свободы движения, однако, эти вершины в отличие от вершин ћal-графа, и в соответствии с поступающим значениям показаний датчи-

ков, будут совершать движения уже в не параллельных, а в радиальных направлениях.

На рис.19 и 20-21 изображены различные, однако, в то же время эквивалентные картины наблюдения, представленные в циферблатной и обычной форме.

На рис.19, с целью сохранения аналогии с последующим рис.20, не дорисовано ребро hal-графа, которое соединяет конечные вершины с номерами 1 и 100. Здесь и на следующем рисунке принято, что наблюдаемый объект один, а количество датчиков равно 100.

При получении рис.20 было предположено, что в течение предшествующих 45 секунд, затраченных на сохранение и печать рис.19, показания датчиков остаются без изменений (для того чтобы можно было сравнивать различные конфигурации одного и того же hal-графа в двух эквивалентных представлениях).

На рис.19, 20 и 21 несложно усмотреть, что контролируемый датчиком 17 узел объекта находится в аварийном состоянии.

На рис.21 приведено изображение копии картины наблюдения из рис.20 без элементов интерфейса программы (изображение на полный экран). Из сравнения рис.19 и 20 может показаться, что циферблатная форма является более удачной для проведения наблюдений, поскольку плотность расположения опорных отрезков на ней меньше.

Такая мысль все же не подтверждается воспроизведенной на рис.21 немного увеличенной копией обычной картины наблюдения из рис.20.

Предпочтение, отданное нами принятому до сих пор

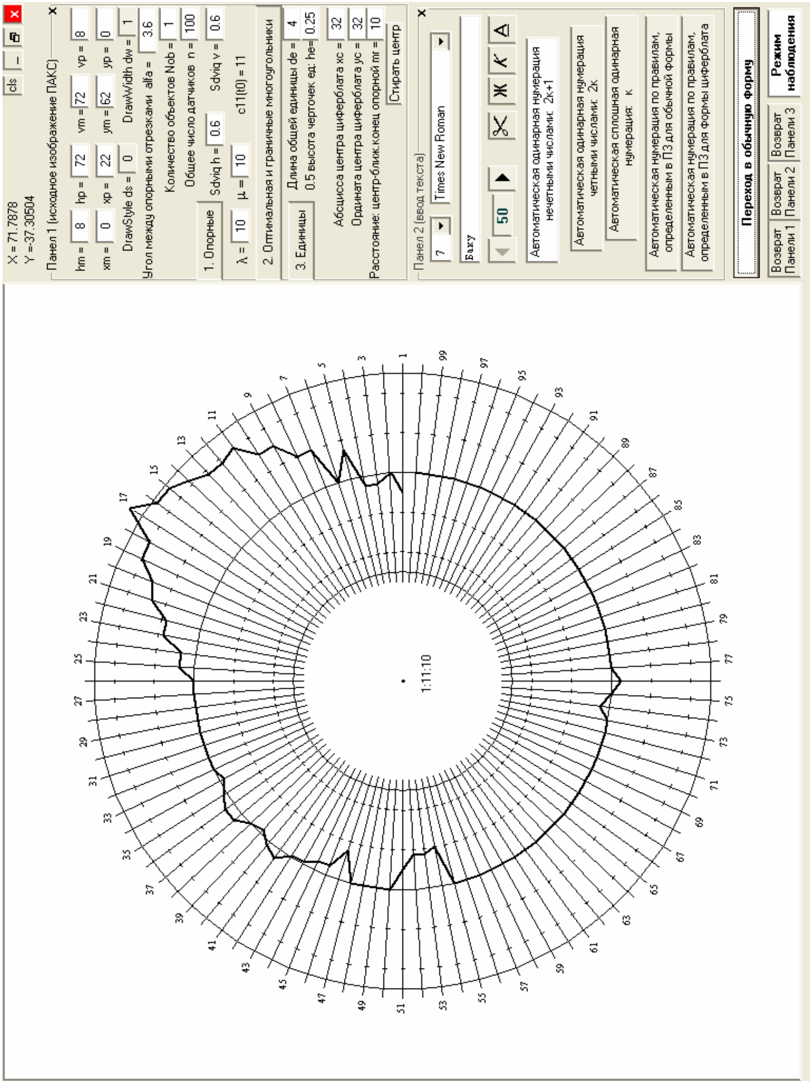


Рис. 19. Изображение картины наблюдения в форме циферблата на момент времени $\tau = 1:11:10$ и с элементами интерфейса.

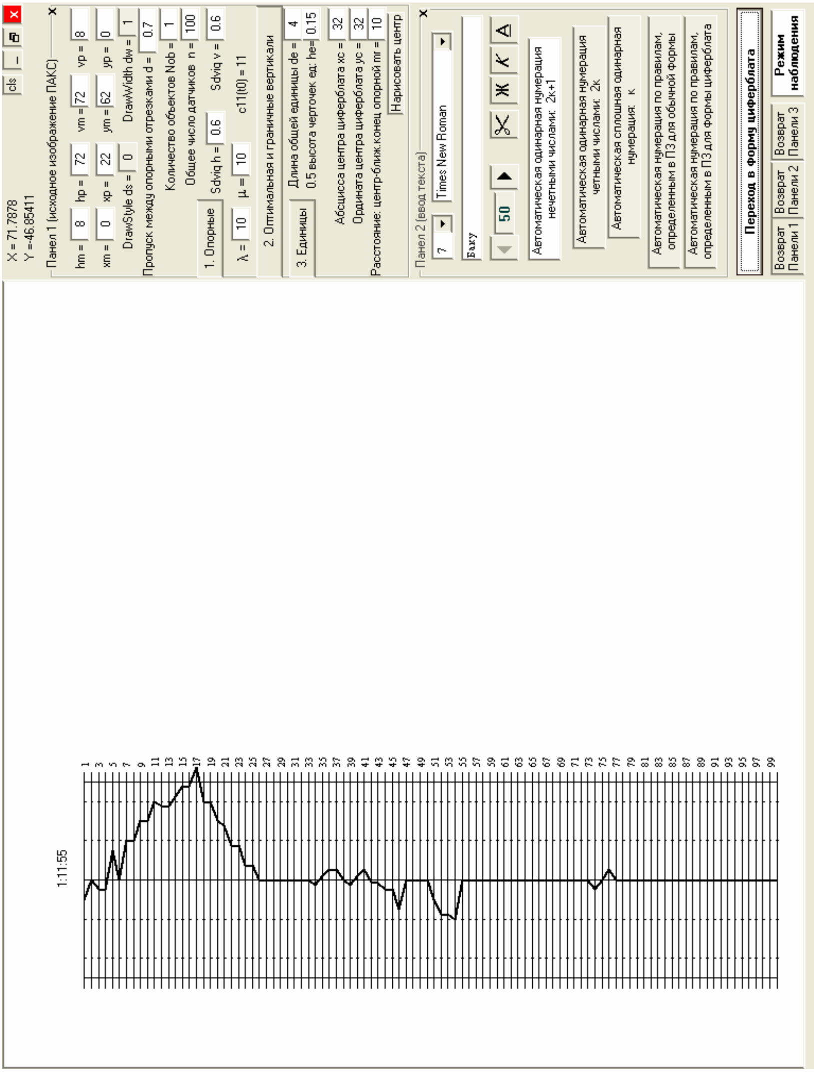


Рис. 20. Эквивалентное изображение картины наблюдения из рис.19 в обычной форме на момент времени $\tau = 1:11:55$.

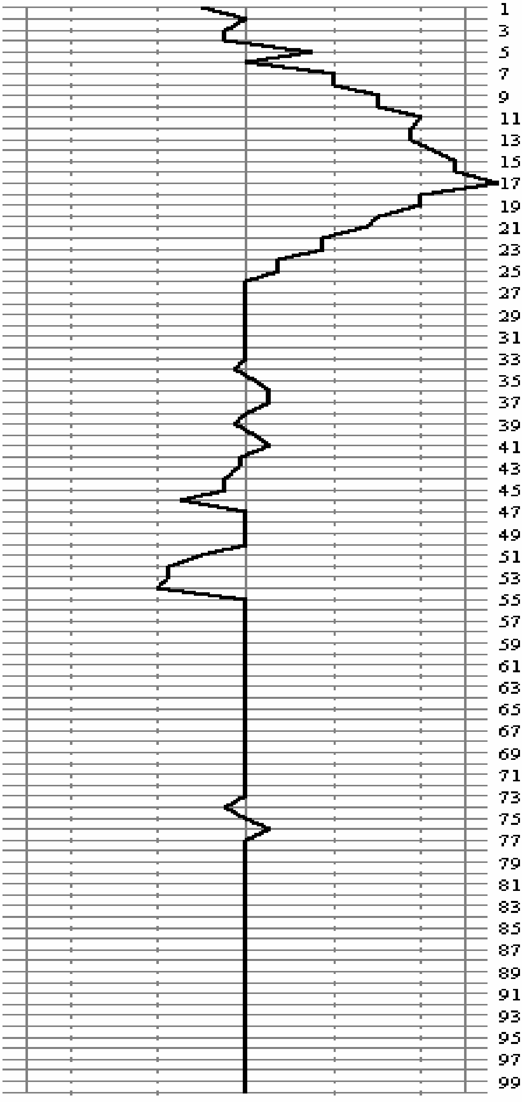


Рис. 21. Изображение копии картины наблюдения из рис.20.

виду hal-графа, конечно, можно было бы объяснить стремлением не терять аналогии со строительным опытом, связанным с применением отвеса (напомним, что эта аналогия приведена во введении). Однако, несмотря на некоторую компактность картины наблюдения в циферблатной форме, мы располагаем, как минимум, двумя причинами, которые и предопределили наш выбор в пользу не циферблатной формы представления картин наблюдения.

Первая причина заключается в том, что только в обычной, не циферблатной форме представления картины наблюдения мы располагаем возможностью, точнее свободным местом на экране, достаточным для воспроизведения прошлых картин наблюдения в целости, что позволяет наблюдателю при желании четко определить динамику изменений в показаниях датчиков.

Вторая же причина связана с движением глаз, а именно, при циферблатной форме картины наблюдения, зрение наблюдателя должно охватить большую часть плоскости картины наблюдения. Между тем при обычной форме картины наблюдения для наблюдателя достаточно будет охватить зрением не очень широкую полосу на той же плоскости картины наблюдения (или полосы, в случаях изображений прошлых картин наблюдения).

Впрочем, в любом случае, в программе имеет смысл предусмотреть команду, которая позволяет осуществить быстрый переход от любой одной формы картины наблюдения к другой ее эквивалентной форме. В частности, на интерфейсе, изображенном на рис.19 и 20, такая возможность предусмотрена, и реализуется программой практи-

чески мгновенно, после простого щелчка кнопки мышки в случае, если курсор находится над виртуальной клавишей команды со следующими, поочередно меняющимися при нажатиях названиями:

«Переход в обычную форму» и «Переход в форму циферблата».

Мы завершили описание подхода, позволяющего нам перейти от обычной формы текущей картины наблюдения к ее эквивалентной циферблатной форме и обратно.

Краткое описание неясных элементов интерфейса из рисунков 19 и 20 приведено в примечании 31.

В примечании 32 описывается способ построения аналога I координатной системы в циферблатном виде, и приводятся рассуждения в пользу решения проблемы глобального наблюдения для этого случая. Здесь, ввиду наличия явных аналогий, для описания мы выбрали чрезмерно конспективный стиль изложения и больше старались акцентировать внимание читателя на имеющихся различиях.

Примечания:

31. Краткие сведения о тех элементах интерфейса из рис.19,20, назначения которых неясны, т.е. не определяются их названиями.

Сам интерфейс составлен в программной среде *Visual Basic* 6. Он построен на объекте *Form 1*, на котором поместились объект *Picture 1*, три панели (*Frame*) – один из них на рисунках невидим, и, не содержащиеся на панелях восемь командных кнопок. Отметим, что в случаях, когда число датчиков не очень мало, ресурсные возможности одной формы *Visual Basic* 6 оказываются недостаточными для разработки полноценной программы слежения.

Четырьмя элементами на первой строке *Панели 1* определяется местоположение на объекте *Picture 1* начальной точки, двумерного аналога дополнительной декартовой координатной системы (без

оси времени), описанной в разделе 2.2 (посредством обычного в рассматриваемой программной среде оператора:

$$Picture1.Scale(-hm, vp)-(hp,-vm)\ ).$$

Четырьмя элементами на второй строке *Панели 1* задаются данные координатных осей этой координатной системы. При этом величинами xm и xp задаются абсциссы граничных точек всех опорных отрезков для обычной формы картины наблюдения. Величиной ym определяется длина не изображаемой оси y дополнительной декартовой координатной системы, а величиной yp – ординаты точек опорного отрезка, соответствующего первому датчику.

В текстовом окне с названием «0.5 высота черточек ед. he = » определяется величина половины длины разделительных черточек, используемых для разбивки опорных отрезков на единицы.

В текстовых окнах, с названиями $Sdviq\,h$ и $Sdviq\,v$, для меток с нумерациями опорных отрезков задаются величины сдвигов в горизонтальных или вертикальных направлениях соответственно.

На *Панели 2* окно метки без названия и с цифрой 50 является счетчиком. Цифра 50 указывает на то, что общее количество меток объекта *Picture 1*, уже использованных при автоматической нумерации опорных отрезков, равно 50.

П3 – сокращенное название *Панели 3*. В случае, когда общее количество наблюдаемых объектов больше единицы, т.е. $Nob > 1$, то на этой панели задаются численные значения для параметров k_i, $i = \overline{1, Nob}$, а также характеристики разделительных черточек.

О назначениях остальных элементов интерфейса, по-видимому, догадаться (по их названиям) не сложно.

32. Здесь мы начнем строить аналог I координатной системы, в которой не существуют параллельных координатных плоскостей.

Оставляя неизменными обозначения и определения из раздела 1.1, а также определение 1.2.1 несущей плоскости, аналог I координатной системы (для циферблатного случая) определим в R_3 на n плоскостях, перпендикулярных к несущей плоскости и пересе-

кающихся по некоторой новой прямой линии DD_0.

На несущей плоскости координатные оси x_i, $i = \overline{1, n}$, расположим в радиальных направлениях, требуя, что каждая координатная ось разместился только на одном из пересечений этих n плоскостей с несущей плоскостью. Будем считать, что начальная точка каждой координатной оси x_i находится на точке пересечения этих осей. По-прежнему полагаем, что оси x_i предназначены для геометрического изображения значений наблюдаемых функций $i_j(t)$, граничных и оптимальных функций в новой координатной системе, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, $t \in T$.

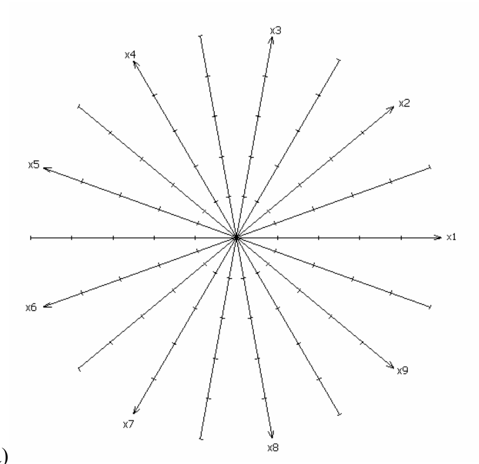
Замечание об углах

Выше мы не акцентировали внимание на значениях углов между плоскостями, пересекающими несущую плоскость. Дело в том, что по соображениям симметрии, конечно, можно требовать, чтобы углы между положительными направлениями любых двух ближайших координатных осей x_i были одинаковыми (и равны $360^\circ / n$), например, так, как это изображено для осей на рис.22a или рис.22b.

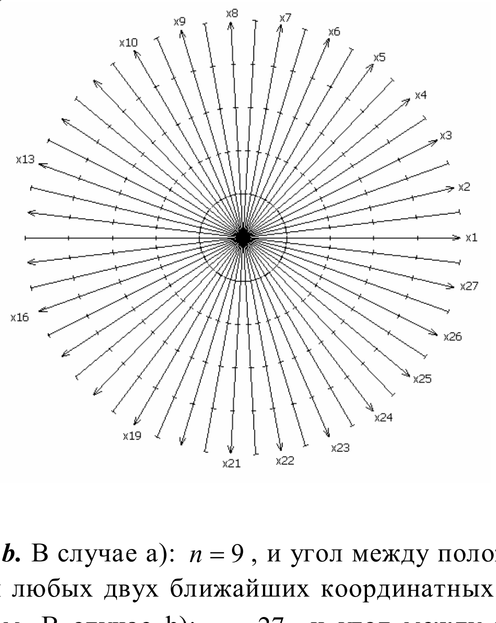
Однако подобное симметрическое расположение координатных осей возможно только в том случае, если n можно представлять в виде $n = 3^m$, где m – любое натуральное число. В противном случае, отмеченная симметрия нарушается.

Это обстоятельство не создает нам серьезного препятствия, поскольку с переходом к опорным отрезкам, мы «теряем» отрицательные части координатных осей, а после этого указанная симметрия легко восстанавливается (после действий соответствующих преобразований вращения, примененных к опорным отрезкам).

Координатную ось времени t, предназначенную для измерений времени расположим на линии DD_0, ориентируя ее в направлении, идущем от несущей плоскости к наблюдателю. Примем, что начальная точка оси времени, соответствующая моменту времени $t = t_0$ располагается на пересечении линии DD_0 с несущей плоскостью.



a)



b)

Рис. 22 a, b. В случае a): $n = 9$, и угол между положительными направлениями любых двух ближайших координатных осей x_i равен 40 градусам. В случае b): $n = 27$, и угол между положительными направлениями любых двух ближайших координатных осей x_i равен 6.6(6) градусам.

Единицы измерения для координатных осей определим точно так же, как это было сделано для I координатной системы (раздел 1.2).

В итоге мы видим, что пространстве R_3 каждая упорядоченная пара осей x_i, t, $i=\overline{1,n}$, образует двумерную левую прямоугольную декартовую координатную систему.

В свою очередь эти координатные системы вместе создают в пространстве R_3 аналог I координатной системы (см. рис.23). Так как в новой координатной системе мы имеем дело с единственной осью времени, то в данном случае у нас отсутствуют возможности для введения понятий плоскости и поверхности времени (раздел 2.1). Это обстоятельство не создает проблему в виду того, что в исходной I координатной системе все оси времени рассматривались как копии одной временной координатной оси.

По аналогии с предыдущим, часть пространства R_3, заключенная между координатными плоскостями построенного аналога I координатной системы, не имеет никакого отношения к измерительным функциям этой координатной системы. Отбрасывая из этой координатной системы ось времени, мы получим аналог стационарной координатной системы для рассматриваемого случая.

С учетом идеи доказательства леммы 1.3.1 можно убедиться в том, что конгруэнтные преобразования координатных осей прямоугольной декартовой координатной системы из пространства R_n, приводящие их к совпадению с соответствующими координатными осями аналога стационарной координатной системы, можно осуществить гомеоморфным образом. При этом главное отличие проявляется в том, что на этот раз отпадает необходимость в «расщеплении» многомерной начальной точки координатной системы пространства R_n на одномерные начальные точки осей новой стационарной координатной системы. Наличие гомеоморфного отображения, наряду с тем положением, что размерность пространства является топологическим инвариантом, приводят нас к утверждению, являющимся аналогом теоремы 1.3.1, причем как по формулировке, так и по идее доказательства.

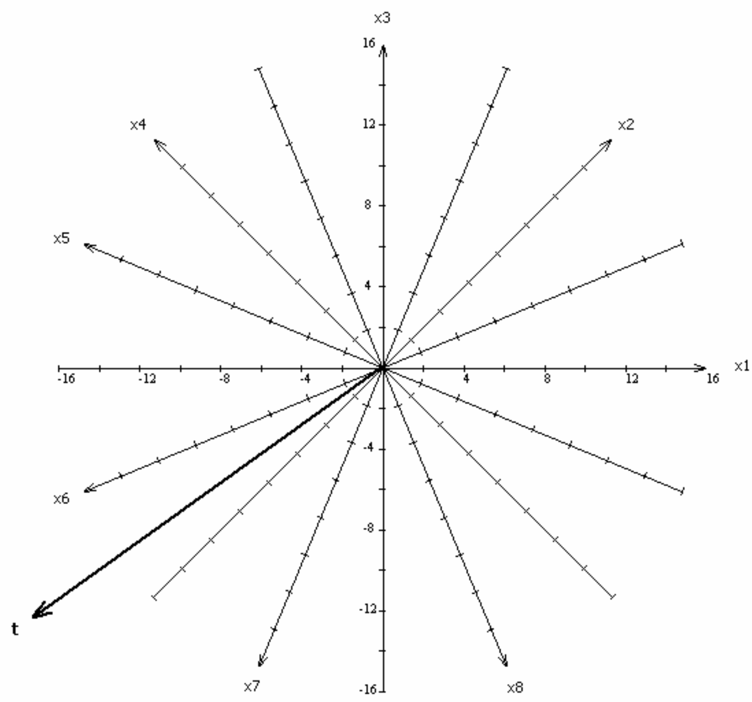


Рис. 23. Аналог I координатной системы для случая $n = 8$. Так как в рассматриваемом случае $n \neq 3^m$ при любых натуральных числах m, то в соответствии с замечанием об углах, невозможно путем изменений ориентаций координатных осей добиться того, чтобы углы между положительными направлениями любых двух ближайших по расположению координатных осей x_i, $i = \overline{1,8}$, были одинаковыми. В частности, на данном изображении такая симметрия, в расположениях осей, нарушена координатными осями x_4 и x_5.

Таким образом, теперь в интерпретации записи гомеоморфного отображения (1.3.1) новым будет только то, что на этот раз вершины 0 - графа будут расположены на координатных осях, размещенных на плоскости в радиальном порядке. Поэтому при действии общего правила (раздел 1.3), мы на несущей плоскости в качестве образов точек пространства R_n, будем получать односвязные и неориентированные n - вершинные графы, имеющие вид *многоугольников*.

Конечно, замкнутость этих многоугольников может быть нарушена в случае отсутствия ребра между вершинами 1 и n, поэтому мы условимся в дальнейшем в обязательном порядке соединять ребром эти вершины. В результате, между множеством таких многоугольников и пространством R_n будет существовать гомеоморфное соответствие вида (1.3.2).

Продолжая аналогии с ранее описанными шагами, можно вводить в рассмотрение аналоги II адаптивной координатной системы и преобразованной адаптивной координатной системы. При переходе к аналогу II адаптивной координатной системы, количество вводимых осей времени возрастает и достигает числа n. Важно отметить, что при этом противоречий не возникает, в силу того, что эти оси времени, как и ранее, рассматриваются как копии одной исходной оси времени. Интересно, что при этом не возникает серьезной необходимости для введения особых новых обозначений с целью указания так координат точек, как и названий соответствующих координатных осей.

Однако в рассматриваемом случае понятие дополнительной декартовой координатной системы не вводится. Все обозначения, не связанные с этой координатной системой и использованные ранее, для указания, как координат точек, так и названий координатных осей, мы оставляем без изменений. При этом, в зависимости от контекста, понятие расстояния до «плоскости времени» теперь следует воспринимать как понятие расстояния до одной соответствующей «временной оси» аналога I, или II, или же преобразованной адаптивной координатной системы. В результате все положения и даже формулы, приведенные в разделе 4.5, остаются в силе, испытывая

дополнительно лишь применения преобразований вращения и сдвига, определяемые естественным образом соответствующими новыми расположениями координатных осей. Назовем эти преобразования для краткости *преобразованиями соответствия*.

Отметим, что в программе, упомянутой в примечании 31, преобразования соответствия дополнительно были применены ко всем координатам меток на объекте *Picture 1*, содержащим нумерации координатных осей.

Изменения коснуться и названий оптимальных вертикалей, оптимальной плоскости, левой и правой граничных вертикалей, левой и правой граничных полос, а также hal-графа и hal-поверхности. Приводимые ниже определения рассчитаны для рассматриваемого аналога I координатной системы, причем подробнее мы приводим те определения, которые имеют некоторые отличия от ранее введенных понятий и терминов.

Определение 4.6.1. *Плоскость, которая параллельна несущей плоскости и пересекает ось времени на удалении $\tau - t_0$ от нее, назовем τ - несущей плоскостью. Если τ является текущим значением времени, то соответствующую τ - несущую плоскость будем называть текущей τ - несущей плоскостью.*

Ниже предполагаем, что $c_{11}(t_0) > 0$. В случае, когда это предположение может привести к ограничению общности рассуждений, мы в соответствии с примечанием 8 вместо значения $c_{11}(t_0)$ возьмем произвольно фиксированное значение $a > 0$.

Аналог τ – оптимальной вертикали дается в следующем определении:

Определение 4.6.2. *Назовем τ - оптимальным многоугольником расположенный на τ - несущей плоскости такой n - вершинный правильный многоугольник, вершины, которого можно описать точками, полученными от точек с координатами $(c_{11}(t_0), \tau)_{ij}$ в результате применения соответствующих преобразований соответствия.*

Для τ - оптимального многоугольника сохраним прежнее обозначение $Op(\tau)$, где $\tau \in T$.

Определение 4.6.3. *Поверхность, которая по ходу времени* $\tau \in T$ *описывается* τ *- оптимальным многоугольником* $Op(\tau)$ *будем называть оптимальной поверхностью и обозначать символом* $Op(T)$.

Таким образом, при всяком значении времени $\tau \in T$ соответствующий τ - оптимальный многоугольник $Op(\tau)$ является образующим для оптимальной поверхности $Op(T)$.

Очевидно, что каждая вершина τ - оптимального многоугольника удалена от оси времени на расстояние $c_{11}(t_0)$.

Образно говоря, в новом представлении оптимальные многоугольники и оптимальная поверхность могут быть получены от оптимальных вертикалей и оптимальной плоскости путем надлежащего их свертывания. Сказанное относится также к новым представлениям понятий левой и правой граничных вертикалей, соответственно левым и правым граничным полосам, а также к понятиям hal-графа и hal-поверхности.

Каждый hal-многоугольник является n - вершинным многоугольником и имеет вершины, координаты которого в каждый момент времени в новой преобразованной адаптивной координатной системе взаимнооднозначно определяются численными значениями контролируемых датчиков.

По аналогии с предыдущим, в том случае, когда все численные значения контролируемых датчиков соответствуют оптимальным, hal-многоугольник совпадает с соответствующим по времени оптимальным многоугольником.

Представляется очевидным, что в новой преобразованной адаптивной координатной системе оптимальный многоугольник, внутренний и внешний граничные многоугольники могут быть построены *заблаговременно*, точно так же, как это ранее имело место для обычных форм картин наблюдения.

4.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ДИАГНОСТИКИ

При решениях диагностических задач те или иные выводы о состояниях диагностируемых объектов делаются, как правило, на основе анализа показаний датчиков, применяемых в диагностических целях. Описанная выше геометрическая версия решения проблемы глобального наблюдения, ориентирована на распознавания состояний наблюдаемых объектов по положениям (конфигурациям) либо hal-графов, либо же hal-многоугольников, т.е. геометрических объектов, взаимнооднозначно определяемых в преобразованной адаптивной координатной системе показаниями используемых датчиков. При этом согласно теореме 1.4.2, между множествами всевозможных состояний различных диагностируемых объектов и hal-графов (соответственно hal-многоугольников), существует гомеоморфное соответствие. Тем самым, в некотором смысле устанавливается прямая связь между диагностикой и геометрическими объектами простой структуры – hal-графами или hal-многоугольниками соответственно.

Безусловно, некоторые существующие на практике диагностические приборы (датчики) конструктивно рассчитаны как раз на то, чтобы передавать информацию о состоянии диагностируемых объектов в виде графиков, которые естественно можно рассматривать в качестве геометрических объектов. Однако каждый такой график, с одной стороны, содержит информацию, как правило, об изменениях одного или нескольких физических параметров, т.е. не несет подобно hal-графу или hal-многоугольнику точ-

ную информацию о поведениях всех без исключения многочисленных наблюдаемых параметров (иначе говоря, отсутствует свойство точной «корпоративной аппроксимации», отмеченное в разделе 4.3). С другой стороны, опять же в отличие от hal-графов или hal-многоугольников – ломаных линий, имеющих вершины на несущей плоскости только с одной степенью свободы движения (соответственно в горизонтальных или радиальных направлениях), – эти графики часто описываются кривыми достаточно сложной формы, требующими от наблюдателя соответствующей квалификации и навыков для адекватного их распознавания.

Обычно информацию о состояниях диагностируемых объектов мы получаем, вообще говоря, в виде не только графиков, но и чисел. Между тем запись чисел, безусловно, также осуществляется посредством некоторых общепринятых и практически мгновенно распознаваемых геометрических кривых. Но, числа (или цифры) нами осваивались в процессе обучения. Не исключено, что приблизительно также, в процессе соответствующего обучения, можно овладеть искусством быстрого распознавания hal-графов или hal-многоугольников в случаях, когда в осуществляемых процессах слежения выполняются следующие четыре условия:

1. Слежение осуществляется за одними и теми же фиксированными объектами или процессами;

2. Количества и типы датчиков, отнесенных к каждому наблюдаемому объекту, остаются неизменными;

3. Каждый датчик сигнализирует о качестве функцио-

нирования только одного фиксированного узла соответствующего наблюдаемого объекта;

4. Во всех картинах слежения порядок расположения объектов и датчиков, а также нумерации соответствующих им опорных отрезков остаются неизменными.

Таким образом, вместо распознавания трудно обозримой огромной информации, носительницей которой обыкновенно служат многочисленные геометрические кривые, предлагается обучится быстрому и несложному распознаванию эквивалентной информации, определяемой геометрическими конфигурациями всего одного hal-графа или hal-многоугольника.

Во всяком случае, при выполнении перечисленных выше условий, такое обучение, по-видимому, не представляется слишком уж нереальной.

В следующем разделе, на примере медицинской диагностики обсуждается в схематичной форме некоторые возможности, связанные с приложениями предлагаемой геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения к задачам диагностики (см. примечание 33).

Примечание 33:

В разделе 4.8 в схематичной форме обсуждается задача диагностирования для многих пациента. Вообще говоря, по-видимому, «несхематичная» форма изложения этой темы невозможна без должного участия в этом многообещающем деле медицинских экспертов.

Выбор в качестве примера медицинской диагностики был продиктован двумя причинами. Первая причина носит субъективный характер, и связана с тем, что идеи (но не названия) адаптивной координатной системы и hal-графа в свое время возникли у автора

при попытках найти сравнительно точные и надежные способы для геометрического решения задач, связанных с медицинским обследованием пациентов. Вторая же причина связана с тем, что в некотором смысле, сам переход от медицинской диагностики к эквивалентной «диагностике» hal-графов, открывает путь к применениям в диагностировании геометрических идей.

Мы не решились включить в обсуждения некоторые имеющиеся дополнительные математические идеи из-за боязни того, что эти идеи все-таки имеют медицинские эквиваленты, и поэтому они обязательно должны быть тщательно обсуждены с медиками (здесь речь идет не только о диагностировании, но и о возможном определении оптимального курса лечения на основе решения адекватной математической задачи оптимизации).

4.8. СХЕМА ПРИМЕРА ПО МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ

Для удобства изложения всевозможные медицинские приборы или оборудования, применяемые для обследования пациентов, условимся *в пределах этого раздела* называть датчиками. Такими датчиками могут быть, например, артериальный осциллограф, служащий для получения графика давления пациента, сфигмограф – для определения в виде графика пульсовых колебаний сосудистой стенки, электротермограф – для получения непрерывных графиков температуры или даже обычный медицинский термометр – для определения температуры пациента в отдельные дискретные моменты времени и т.д.

Результаты лабораторных медицинских анализов, полученные в дискретные моменты времени в виде некоторых размерных или безразмерных величин, очевидно, могут быть интерпретированы как значения некоторых вообра-

жаемых кусочно-постоянных функций (обычных числовых или булевых) с временным аргументом. Это обстоятельство позволяет отнести к числу рассматриваемых датчиков и те медицинские приборы или средства, которые рассчитаны для получения всевозможных дискретных медицинских характеристик при проведениях медицинских анализов (по этому поводу см. примечание 34).

Множество всевозможных датчиков, реально доступных для применения в целях обследования пациентов в течение определенного промежутка времени T_t, обозначим символом $\Omega(T_t)$. Здесь $T_t = [t_0, t]$, $t \in T_{t_1} = T = [t_0, t_1]$.

Множество $\Omega(T)$ в хороших клиниках обычно состоит из многочисленных и разнотипных датчиков. Да и количество ежедневно обследуемых пациентов в таких клиниках нередко достаточно велико. Таким образом, если относится к процедуре медицинского диагностирования как к распознаванию многочисленных и неоднородных «материалов» надежного слежения, то рассматривая пациентов в качестве объектов слежения, мы окажемся в условиях применения отмеченного в разделе 4.7 геометрического подхода (напомним, что смысл выражения «надежное слежение» был раскрыт еще во введении).

Ниже, сначала, мы покажем, что возможности для применения описанного в книге геометрического подхода в медицинской диагностике действительно благоприятные. После этого, постараемся обосновать полезность такого подхода.

Прежде, обратим внимание на то, что в книге, до применения преобразований времени (раздел 4.4), временные

координаты всех точек оставались инвариантами преобразований их пространственных координат. Это, по сути, означает, что преобразования времени для временных координат точек можно было с самого начала реализовать и в I координатной системе. В силу этого, в I координатной системе, для изображений текущих показаний каждого из датчиков, можно выделить по одной не временной координатной оси, расположенной на текущей несущей плоскости (определение 3.3.1) при любых значениях времени. При этом никакой путаницы не возникает. Поскольку не временные оси, отвечающие прошедшим моментам времени, в соответствии с действием преобразований (4.4.1) по ходу времени удаляются от текущей несущей плоскости в отрицательном направлении координатных осей времени.

По-прежнему считаем, что показание каждого датчика является скалярной величиной (стр.24). Поэтому, если показания какого-то датчика описываются векторной функцией, то каждой ее компоненте нужно относиться как к скалярному показанию отдельного датчика.

Следовательно, для датчиков, вырабатывающих сигналы с несколькими скалярными составляющими, придется выделить соответственно столько же не временных координатных осей (по этому поводу см. примечание 35).

Таким образом, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что множество $\Omega(T)$ состоит из датчиков, вырабатывающих только скалярные показания.

Напомним, что согласно разделу 1.2, различия в физических размерностях показаний датчиков совершенно не являются помехой для проведения слежения.

В соответствии с разделом 1.1, для обследуемого i- го пациента показание j- го датчика соответствующего моменту времени $\tau \in T$, обозначим как $i_j(\tau)$, где i– идентификационный номер пациента, k_i – количество датчиков из множества $\Omega(T)$, привлекаемых для обследования пациента i, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Предположим, что посредством надлежащего использования всякого датчика из множества $\Omega(T)$ могут быть получены дискретные или непрерывные кривые двух типов, характеризующие либо нормальное, либо же ненормальное физиологическое функционирование какого-либо органа диагностируемого пациента на отрезке времени T.

Кривые, причисляемые медицинскими экспертами к первому типу, назовем допустимыми кривыми рассматриваемого датчика. Точки допустимых кривых условимся называть допустимыми точками.

Кривые второго типа назовем недопустимыми. Те точки недопустимых кривых, которые не могут оказаться на пересечении этих кривых с допустимыми кривыми, будем называть недопустимыми точками. Так что всякая недопустимая кривая должна иметь хотя бы одну недопустимую точку.

По аналогии с разделом 1.1 примем, что все датчики или, хотя бы, подавляющее количество датчиков из множества $\Omega(T)$, могут принимать допустимые значения из некоторых интервалов. Пусть $I_{ij}(\tau) = (a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau))$ – минимальный по длине интервал, определяемый медицинскими

экспертами из того условия, что этот интервал содержит все допустимые, т.е. с медицинской точки зрения благоприятные для обследуемого пациента значения функции $i_j(\tau)$ на момент времени $\tau \in T$.

Считаем, что относительно показаний датчиков из множества $\Omega(T)$ все диагностируемые органы пациента i в момент времени τ функционируют нормально, если только $i_j(\tau) \in I_{ij}(\tau)$ для всех значений j, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$.

Кривые (функции) $a_{ij}(\tau)$ и $b_{ij}(\tau)$, вновь, по аналогии с разделом 1.1, будем называть левыми и правыми граничными кривыми (функциями) соответственно. Точки этих кривых (или функций) назовем соответственно левыми и правыми граничными недопустимыми точками (значениями) или, более кратко – граничными точками.

В соответствии с разделом 4.6, в случае представления картины наблюдения в циферблатной форме, очевидно, следует слова «левый» и «правый» заменять словами «внутренний» и «внешний» соответственно.

Сказанное, относится и к терминам «оптимальная вертикаль», «граничная вертикаль» и «hal-граф». Они в циферблатной форме картины слежения заменяются терминами «оптимальный многоугольник», «граничный многоугольник» и «hal-многоугольник» соответственно.

Примем, что среди допустимых кривых каждого датчика из множества $\Omega(T)$ медицинскими экспертами может быть выделена одна – соответствующая наилучшему функционированию обследуемых органов пациентов. Назовем эту кривую оптимальной кривой (функцией).

В затруднительных случаях оптимальную кривую можно определять поточечным образом как среднеарифметическую от возможно большого числа допустимых кривых (в этом случае оптимальные кривые удовлетворяют условию единственности).

Оптимальные кривые обозначим символами:

$$c_{ij}(\tau)\text{, где } \tau \in T\ ,\ i=\overline{1,N}\ ,\ j=\overline{1,k_i}\ .$$

Мы считаем важным, что относительно заданного множества приборов $\Omega(T)$, левые и правые граничные функции, а также оптимальные функции, по-видимому, в подавляющем своем большинстве могут быть определены медицинскими экспертами заблаговременно, т.е. до начала процедуры диагностирования.

Заметив, что между введенными выше функциями, по аналогии с формулой (1.1.1), существуют следующие отношения порядка:

$$a_{ij}(\tau)< c_{ij}(\tau)< b_{ij}(\tau)\ \ \forall \tau \in T\ ,\ i=\overline{1,N}\ ,\ j=\overline{1,k_i}\ ,$$

заключаем, что мы находимся в условиях благоприятных для применения предлагаемой геометрической версии решения проблемы глобального наблюдения.

При этом граничные полосы $GA^{\circ}(T)$ и $GB^{\circ}(T)$ в преобразованной адаптивной координатной системе могут быть истолкованы как плоскости опасности (или, клинической смерти или, даже смерти) относительно датчиков множества $\Omega(T)$.

Относительно этого же множества датчиков оптимальная t_1 - полоса $Op^{\circ}(T)$ будет соответствовать наилучшему

физическому состоянию обследуемого пациента.

С учетом рекомендаций раздела 4.5, изображения граничных вертикалей $GA^{\circ}(\tau')$, $GB^{\circ}(\tau')$ и оптимальной вертикали $Op^{\circ}(\tau')$, соответствующие кривым $a_{ij}(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$ и $c_{ij}(\tau)$, $j=\overline{1,k_i}$, в преобразованной адаптивной координатной системе, воспроизводятся практически автономно, т.е. формулами преобразований (4.5.1) и (4.5.2), не требующими однако, для достижения этой цели выполнения каких-либо арифметических или логических операций (исключение составляют разве лишь вычисления, проводимые с проверочной целью). Здесь и далее связь между моментами времени τ и τ' устанавливается преобразованиями времени (4.4.1).

Эти и другие формулы преобразований, описанные в разделе 4.5, оказываются необходимыми для вычисления координат только лишь для одного типа точек, а именно точек $H_{ij}^{\circ}{}''(\tau)=\left| i_j^{\circ}{}''(\tau), \tau' \right|_{ij}$ – вершин hal-графа в преобразованной адаптивной координатной системе.

Эти вершины являются соответствующими образами точек $H_{ij}(\tau)=\left(i_j(\tau), \tau\right)_{ij}$, которые описываются в координатах I координатной системы в соответствии со значениями показаний датчиков, где $\tau \in T$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,k_i}$.

Из геометрической картины наблюдения по конкретным местоположениям вершин hal-графа относительно граничных вертикалей и оптимальной вертикали, представляется возможным определение реального физическо-

го состояния обследуемого пациента относительно показаний датчиков из множества $\Omega(T)$. Положительные стороны такого геометрического подхода обстоятельно описаны в разделах 4.5 - 4.7. Укажем теперь на некоторые дополнительные соображения, непосредственно связанные с медицинской диагностикой.

Для подчеркивания возможностей описанной системы слежения, применительно к медицинской диагностике, рассмотрим следующий сугубо гипотетический пример.

Пример (гипотетический). Пусть одному врачу кардиологу требуется в текущем режиме одновременно анализировать кардиограммы десятерых пациентов.

Для решения этой задачи, в соответствии с примечанием 35, понадобится преобразованная адаптивная координатная система, имеющая всего 110 не временных координатных осей, или, что то же самое, столько же опорных отрезков. Соответственно, hal-граф будет иметь 110 вершин. После надлежашей настройки преобразованной координатной системы (т.е. по завершению процесса обучения, состоящем в определении всех функций $a_{ij}(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$ и $c_{ij}(\tau)$, $i=\overline{1,10}$, $j=\overline{1,11}$), решение задачи слежения, согласно разделу 4.6, не потребует от врача серъезных усилий. Если до начала слежения провести соответствующее обучение по классификации множества hal-графов (по признаку их соответствия различным болезням сердца), то и для проведения диагностирования от врача не потребуется особых усилий и времени. А тогда, когда у всех 10 - ти обследуемых пациентов не будет никаких отклонений от нормы, соответствующий hal-граф совпадет с оптимальной верти-

калью. Для распознавания такой благоприятной ситуации, конечно же, не требуется быть профессионалом кардиологом. Кстати, такое нелегко вообразить для случая анализа даже одной кардиограммы, здесь трудно обойтись без профессионала кардиолога. Это не случайность. Ибо, в обычных кардиограммах весьма удобная в смысле распознавания прямая линия служить, увы, только для фиксации нежелательных случаев остановок сердца. Далее, не надо быть профессионалом, чтобы понять, насколько близки вершины hal-графа к оптимальной вертикали (или к граничным вертикалям), и, следовательно, определить, нуждаются-ли вообще пациенты в услугах профессионала кардиолога, и если да, то какие именно из 10 - ти пациентов, и даже, какие из них в первую очередь.

В заключении рассмотренного гипотетического примера отметим, что, обе процедуры обучения досточно будет провести только один раз и для случая одного воображаемого пациента, причем раз и навсегда.

Так как между множеством показаний приборов и множеством hal-графов существует взаимнооднозначное соответствие, то квалифицированное, но неоднозначное или не точное определение физического состояния пациента, может быть объяснено не только недостаточностью или несовершенством медицинских приборов, включенных во множество датчиков $\Omega(T)$. Не «попавшие» в классификацию новые конфигурации hal-графа, в принципе, могут соответствовать новым, еще не открытым болезням. Таким образом, получается, что новая система слежения создает некоторые предпосылки для грамотной классификации не

только известных, но и новых, еще не открытых болезней.

В приложении предлагаемой системы слежения к медицинской диагностике наиболее трудной и ответственной проблемой является проблема классификации болезней, соответствующих тем или иным геометрическим положениям соответствующего hal-графа (hal-поверхности) в картинах наблюдения. При этом задача определения отображений (функций) $a_{ij}(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$ и $c_{ij}(\tau)$, $\tau \in T$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k_i}$, сравнительно не представляется столь сложной.

По-видимому, некоторым достоинством предлагаемого подхода к проблеме медицинского диагностирования является то, что задачи обучения медицинскими экспертами могут быть решены в предварительном порядке (т.е. до начала диагностирования пациентов), причем решены раз и навсегда относительно данного множества приборов $\Omega(T)$.

После этого предлагаемая система слежения, позволяет без всякой потери информации перейти от медицинской диагностики к соответствующей «диагностике» геометрических объектов простой природы. Она может быть без серьезных затруднений применена в качестве дополнительного средства для обследования различных пациентов до тех пор, пока не будет изменено количество или качество приборов, содержащихся во множестве $\Omega(T)$.

В примечании 36 рассмотрен простейший случай, позволяющий наблюдателю (врачу) практически немедленно установить состояние пациента, соответствующий его наилучшему с медицинской точки зрения состоянию относительно показаний приборов из множества $\Omega(T)$.

Естественно, из соответствующих картин наблюдения также быстро можно будет определить критические состояния обследуемых пациентов.

Примечания:

34. Результаты пальпации, определяемые врачами обычно без всякого применения медицинских приборов и, полученные в некоторые дискретные моменты времени, в принципе, могут быть описаны в виде не численных значений, а логических слов, т.е. в виде значений некоторого логического отображения с временным аргументом. Каждому такому логическому слову, безусловно, можно взаимнооднозначным образом сопоставить некоторое численное значение, фиксировав это значение за этим словом раз и навсегда. В итоге, даже результаты пальпации корректно можно описать некоторой многозначной булевой функцией, зависящей от времени. Численные значения этой булевой функции, очевидно, могут быть отражены на не временных координатных осях I координатной системы, как значения кусочно-постоянных функций.

В описанном случае, пальцы врача выполняют функции медицинского диагностического прибора и, следовательно, при необходимости выполнения пальпации в некотором смысле они также могут быть отнесены к числу приборов множества $\Omega(T)$ под некоторым условным названием (в тексте определение множества $\Omega(T)$ приведено сразу же после ссылки на это примечание).

35. Например, кривая кардиограммы может быть интерпретирована как график функции, отражающей упорядоченные показания 11 - ти датчиков, вырабатывающих скалярные сигналы. Поскольку состояние сердца пациента, согласно [4], определяется обычно из кривой кардиограммы по амплитудам *пяти* характерных зубцов (т. е. зубцевидных выступов) с обозначениями: P, Q, R, S и T, наличием или отсутствием *одного* выступа, именуемой волной U, и величинами *пяти* временных интервалов между зубцами: RR, TQ, QRS, $QRST$ и ST (последний принято называть сегментом).

Здесь RR – интервал между двумя ближайщими на кардиограмме зубцами типа R.

Следовательно, в адаптивной координатной системе для корректного описания одной кардиограммы необходимо выделить 11 не временных осей.

36. Пусть $M(\Omega(T))$ – множество всевозможных известных медицине предболезненных и болезненных симптомов, которые в принципе могут быть обнаружены у пациента в течение времени $t_1 - t_0$, путем надлежащего применения медицинских приборов из множества $\Omega(T)$.

Симптом, который хотя бы в некоторый момент времени $\tau \in T$ обнаруживается применением только одного медицинского прибора из множества $\Omega(T)$, назовем одинарным симптомом, соответствующим этому моменту времени.

Обнаружение одного одинарного симптома у пациента, очевидно, означает, что среди кривых, описываемых приборами множества $\Omega(T)$, существует только одна неоптимальная кривая. Поэтому геометрическим эквивалентом одинарного симптома соответствующего, например моменту времени τ, очевидно, будет hal-граф $GH^{\circ}(\tau')$, у которого только одна вершина не будет совпадать с оптимальной вертикалью $Op^{\circ}(\tau')$. В свою очередь, неоптимальные кривые могут быть либо допустимыми, либо недопустимыми, причем характер, величины и частота отклонений от оптимальных кривых будут сигнализировать о стадии и степени заболевания пациента, идентифицируемого на основе результатов, полученных на основе предварительного анализа медицинских экспертов.

Во всех случаях, когда диагностирование пациента приборами множества $\Omega(T)$ не позволяет обнаруживать ни один из симптомов множества $M(\Omega(T))$, будем говорить, что пациент совершенно здоров относительно множества симптомов $M(\Omega(T))$.

Таким образом, диагностируемый в течение времени $t_1 - t_0$ пациент совершенно здоров относительно множества $M(\Omega(T))$ тогда и только тогда, когда в преобразованной адаптивной координатной системе имеет место геометрически полное совпадение t_1 - hal-поверхности с оптимальной t_1 - полосой:

$$GH^{\circ}(T) = Op^{\circ}(T). \tag{4.6.1}$$

Каждый симптом, который может быть обнаружен приборами множества $\Omega(T)$, состоит из конечного числа одинарных симптомов (кстати, это обстоятельство открывает путь для введения в классификационных целях не ассоциативные алгебраические структуры, причем, как на множестве симптомов $M(\Omega(T))$, так и на множестве соответствующих hal-графов или hal-многоугольников).

При этом, естественно, предполагается, что отсутствие симптомов, т.е. случай, когда имеет место соотношение $M(\Omega(T)) = \varnothing$, соответствует случаю выполнения критерия (4.6.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Alakbar A. Akhundov. Global observation (tracing) system // Abstracts of the 38th Annual Iranian Mathematics Conference, 3-6 September 2007, University of Zanjan, Iran, p.389-390.

2. Alakbar A. Akhundov. A version of solution a problem of global observation (tracing) // Abstracts of the 2-nd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 2-4 June 2008, Baku, Azerbaijan, 2008, p.25.

3. L.E.J. Brouwer. Über den natürlichen Dimensionsbegriff, Journ. f. Math., 142, 1913, p.146-152 (Подробно об этой работе, а также о дальнейшем развитии идеи Брауэра можно узнать из книги: В. Гуревич, Г. Волмэн. Теория размерности, М., ИЛ, 1948 г., 232 с., перевод с английского языка от издания 1941 года)

4. Медицинский центр Израиль (авторы не указаны). Материалы 2008 года, http:// www.tiensmed.ru/ news/ kardiogramma-wkti/

СОДЕРЖАНИЕ

Директор:	*Ш. Алышанлы*
Заведующий типографии:	*А. Мамедов*
Технический редактор:	*Т. Агаев*
Компьютерное оформление:	*А. Габилкызы*

Формат 60x84 1/16. Объем 16 п.л.
Тираж 300. Заказ № 99
Цена по договору.

Отпечатано в типографии РИПЦ «ЭЛМ»
(Баку, Истиглалийят, 8)